

# 基本解が大きい 2 次不定方程式を定める正整数の族の例 —連分数展開の周期の長さが 9 の場合

橋本 竜太\*

Some families of integers attached to quadratic diophantine equations whose fundamental solutions are large—Cases when the length is 9

Ryūta HASHIMOTO

## Synopsis

Let  $d$  be a positive integer congruent to 1 modulo 4. Let  $(t, u)$  be the fundamental solution of a diophantine equation  $X^2 - dY^2 = -4$ . Let  $l$  be the length of the regular continued fraction expansion of  $(1 + \sqrt{d})/2$ . Then it is known that  $d < u$  does not hold in many cases. In this paper, some families of  $d$  satisfying  $d < u$  and  $l = 9$  are reported.

### 1 目的

本論を通して、 $d$  は 4 を法として 1 に合同な正整数であり、不定方程式  $X^2 - dY^2 = -4$  が整数解を持つものとする。この不定方程式の基本解（最小の正整数解）を  $(t, u)$  とするとき、連分数展開の観点からは、 $d < u$  である場合が少ないことがわかっている。

$(1 + \sqrt{d})/2$  の単純連分数展開が

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \cdots}}}$$

であるとき、部分商  $\{c_k\}$  について次のことが知られている：

- 正整数  $l$  を、 $c_l = 2c_0 - 1$  が成り立つ最小のものとする。このような  $l$  は必ず存在し、しかも奇数である；
- $c_{k+l} = c_k$  ( $k \geq 1$ ) が成り立つ；
- $c_{l-k} = c_k$  ( $1 \leq k < l$ ) が成り立つ。

$\{q_k\}$ ,  $\{r_k\}$  を次の式で定義する（この定義は well-defined である）：

$$\begin{pmatrix} q_k & q_{k-1} \\ r_k & r_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すると、 $u = q_{l-1}$  が成り立つことがわかっている。

以上の準備の下に、 $d < u$  である場合が少ないという事実は次のように述べる事ができる<sup>1)</sup>。

**命題 1.** 奇数  $l$  と  $(l - 1)/2$  個の正整数  $c_1, c_2, \dots, c_{l'}$  (ただし、 $l' = (l - 1)/2$ ) が与

えられたとき、

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \cdots}}}$$

(ただし、

$$c_{k+l} = c_l \ (k \geq 1), \quad c_{l-k} = c_k \ (1 \leq k < l)$$

) が成り立つ  $d$  のうち  $d < u$  が成り立つものはたかだか 1 つしかない。

さらに、 $d < u$  が成り立つならば、次の等式が成り立つ：

$$d = (q_{l-2}r_{l-2} + q_{l-1}s_0)^2 + 4(r_{l-2}^2 + q_{l-2}s_0). \quad (1)$$

ただし、

$$s_0 = - \left\lfloor \frac{q_{l-2}r_{l-2}}{q_{l-1}} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{r_{l-2}^2}{q_{l-2}} \right\rfloor. \quad \square$$

しかしながら、等式 (1) が成り立つからといって  $d < u$  が成り立つわけではない。 $d < u$  が成り立つためには、等式 (1) の他にどのような条件が必要だろうか。それを一般的に考えるのは難しい。

筆者は等式 (1) を満たす  $d$  について数値実験を行い、 $l = 7$  の場合に  $d < u$  が成り立つ  $d$  の族を見出したことを報告した<sup>2, 3)</sup>。 $l = 9$  の場合にも同様にいくつかの族を見出している。その中で興味を引かれるものについて考察を加えることがこの論文の目的である。

以下では、 $d$  は等式 (1) を満たすものとする。

\*一般教科

## 2 見出された族 (1)

この節では,  $c_1, c_2, c_4$  を固定したときに  $c_3$  が決まる例を取り上げる。

**例 1.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (12, 1, c, 8)$  の場合。

$$\begin{aligned} u = q_8 &= 10985c^2 + 22984c + 12025, \\ q_7 &= 845c^2 + 1833c + 993, \\ r_7 &= 65c^2 + 146c + 82, \\ -s_0 &= \left\lfloor 5c^2 + \frac{151c + 88}{13} \right\rfloor \\ &= 5c^2 + \frac{151c + 88 - c'}{13}. \end{aligned}$$

ただし,  $c'$  は

$$c' \equiv 151c + 88 \pmod{13} \quad \text{かつ} \quad 0 \leq c' < 13$$

を満たす整数。もしも  $c' > 0$  ならば

$$-s_0 \leq 5c^2 + \frac{151c + 87}{13}$$

であることから

$$\begin{aligned} d &= (q_7 r_7 + q_8 s_0)^2 + 4(r_7^2 + q_7 s_0) \\ &\geq \left( q_7 r_7 - q_8 \left( 5c^2 + \frac{151c + 87}{13} \right) \right)^2 \\ &\quad + 4 \left( r_7^2 - q_7 \left( 5c^2 + \frac{151c + 87}{13} \right) \right) \\ &= 714025c^4 + 3030170c^3 + 4822299c^2 \\ &\quad + \frac{44341150c + 11761297}{13} \\ &\geq u. \end{aligned}$$

よって,  $d < u$  ならば  $c' = 0$  でなければならない。このとき,  $151c + 88 \equiv 0 \pmod{13}$ , すなわち,  $c \equiv 2 \pmod{13}$ 。さらに,

$$d = 625c^2 + \frac{100(170c + 89)}{13}$$

であることがわかり,  $d \equiv 1 \pmod{4}$  なので,  $c \equiv 1 \pmod{2}$  でなければならない。

以上により,  $d < u$  ならば  $c \equiv 15 \pmod{26}$ 。逆に,  $c \equiv 15 \pmod{26}$  ならば  $d < u$  であることの確認は容易。しかもこのとき,

$$u = 17d + 360c^2 + \frac{9792c + 5025}{13}. \quad \square$$

以下の例において  $d < u$  となる  $c_3$  は上記の例と同様の計算で決定することができる。

**例 2.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (14, 2, c, 12)$  の場合。

$$\begin{aligned} u = q_8 &= 121945c^2 + 137924c + 39005, \\ q_7 &= 8410c^2 + 9657c + 2772, \\ r_7 &= 580c^2 + 676c + 197, \\ -s_0 &= \left\lfloor 40c^2 + \frac{1372c}{29} + 14 \right\rfloor. \end{aligned}$$

$c \not\equiv 29 \pmod{58}$  ならば  $u < d$ 。  $c \equiv 29 \pmod{58}$  ならば

$$\begin{aligned} d &= 625c^2 + \frac{20500c}{29} + 200, \\ u &= 195d + 70c^2 + \frac{2296c}{29} + 5. \quad \square \end{aligned}$$

**例 3.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (33, 1, c, 21)$  の場合。

$$\begin{aligned} u = q_8 &= 510952c^2 + 1040400c + 529618, \\ q_7 &= 15028c^2 + 31042c + 16027, \\ r_7 &= 442c^2 + 926c + 485, \\ -s_0 &= \left\lfloor 13c^2 + \frac{939c + 499}{34} \right\rfloor, \end{aligned}$$

$c \not\equiv 7 \pmod{34}$  ならば  $u < d$ 。  $c \equiv 7 \pmod{34}$  ならば

$$\begin{aligned} d &= 28561c_3^2 + \frac{338(2925c_3 + 1489)}{17}, \\ u &= 17d + 25415c^2 + 51750c + 26336. \quad \square \end{aligned}$$

**例 4.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (84, 2, c, 70)$  の場合。

$$\begin{aligned} u = q_8 &= 139977461c^2 + 143147732c + 36597457, \\ q_7 &= 1656538c^2 + 1698957c + 435612, \\ r_7 &= 19604c^2 + 20164c + 5185, \\ -s_0 &= \left\lfloor 232c^2 + \frac{2(20222c + 5215)}{169} \right\rfloor. \end{aligned}$$

$c \not\equiv 87 \pmod{338}$  ならば  $u < d$ 。  $c \equiv 87 \pmod{338}$  ならば

$$\begin{aligned} d &= 707281c^2 + \frac{3364(36337c + 9290)}{169}, \\ u &= 197d + 643104c^2 \\ &\quad + \frac{3(37048704c + 9470971)}{169}. \quad \square \end{aligned}$$

**例 5.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (27, 11, c, 105)$  の場合。

$$\begin{aligned} u = q_8 &= 979152904c^2 + 196079232c + 9816418, \\ q_7 &= 36143228c^2 + 7248850c + 363455, \\ r_7 &= 1334146c^2 + 267982c + 13457, \end{aligned}$$

$$-s_0 = \left\lfloor 49247c^2 + \frac{11(268389c + 6749)}{298} \right\rfloor。$$

$c \not\equiv 266 \pmod{298}$  ならば  $u < d$ 。  $c \equiv 266 \pmod{298}$  ならば

$$d = 1874161c^2 + \frac{1369(40848c + 2045)}{149},$$

$$u = 522d + 840862c^2 + \frac{25089504c + 1252472}{149}。$$

□

**例 6.**  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (43, 3, c, 73)$  の場合。

$$u = q_8 = 90077000c^2 + 62056800c + 10688210,$$

$$q_7 = 2078700c^2 + 1437410c + 248487,$$

$$r_7 = 47970c^2 + 33294c + 5777,$$

$$-s_0 = \left\lfloor 1107c^2 + \frac{9(11139c + 1940)}{130} \right\rfloor。$$

$c \not\equiv 60 \pmod{130}$  ならば  $u < d$ 。  $c \equiv 60 \pmod{130}$  ならば

$$d = 2825761c^2 + \frac{1681(75276c + 12965)}{65},$$

$$u = 31d + 2478409c^2 + \frac{110984364c + 19114535}{65}。$$

□

### 3 見出された族 (2)

この節では、見出されたいくつかの族がひとつの族にまとめられる例を述べる。

**例 7.** 数値実験によれば、次の場合には  $d < u$  が成り立つようである：

- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, c^3, c, c^2)$  ( $c > 1$ ) ;
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 2c^3, 2c, 2c^2)$  ( $c > 1$ ) かつ  $c \equiv 1 \pmod{4}$  ;
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (3, 3c^3, 3c, 3c^2)$  ( $c > 1$ ) かつ  $c \equiv 1 \pmod{3}$  ;
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (4, 4c^3, 4c, 4c^2)$  ( $c > 1$ ) かつ  $c \equiv 1 \pmod{8}$ 。

以上の場合、

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (c_1, c_1c^3, c_1c, c_1c^2)$$

の場合として一括して論じることができる。 $c = 1$  の場合は  $d = c_1^2 + 4$  であり、 $l = 1$  となる。 $l = 9$  なので、 $c > 1$  でなければならない。このとき、

$$u = q_8$$

$$= c_1^8c^{12} + 4c_1^6c^9 + 3c_1^6c^8 + 6c_1^4c^6 + 6c_1^4c^5$$

$$+ 3c_1^4c^4 + 4c_1^2c^3 + 3c_1^2c^2 + 2c_1^2c + (c_1^2 + 1),$$

$$q_7 = c_1^7c^{12} + 3c_1^5c^9 + 3c_1^5c^8 + 3c_1^3c^6 + 4c_1^3c^5$$

$$+ 3c_1^3c^4 + c_1c^3 + c_1c^2 + c_1c + c_1,$$

$$r_7 = c_1^6c^{12} + 2c_1^4c^9 + 3c_1^4c^8 + c_1^2c^6 + 2c_1^2c^5$$

$$+ 3c_1^2c^4 + 1,$$

$$-s_0 = \left\lfloor c_1^5c^{12} + c_1^3c^9 + 3c_1^3c^8 + 3c_1c^4 - \frac{c-1}{c_1} \right\rfloor。$$

$c \not\equiv 1 \pmod{c_1}$  ならば

$$-s_0 \leq c_1^5c^{12} + c_1^3c^9 + 3c_1^3c^8 + 3c_1c^4 - \frac{c}{c_1}$$

であるから、

$$d = (q_7r_7 + q_8s_0)^2 + 4(r_7^2 + q_7s_0)$$

$$\geq \left( q_7r_7 - q_8 \left( c_1^5c^{12} + c_1^3c^9 \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3c_1^3c^8 + 3c_1c^4 - \frac{c}{c_1} \right) \right)^2$$

$$+ 4 \left( r_7^2 - q_7 \left( c_1^5c^{12} + c_1^3c^9 \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3c_1^3c^8 + 3c_1c^4 - \frac{c}{c_1} \right) \right)$$

$$= c_1^6c^{12}u + (\text{positive}) > u。$$

よって、 $d < u$  ならば  $c \equiv 1 \pmod{c_1}$  でなければならない。このとき、

$$d = c_1^2c^8 + 2c^5 + 2c^4 + \frac{(c-1)^2}{c_1^2}。$$

$c_1 \equiv 0 \pmod{2}$  ならば、 $d \equiv (c-1)/c_1 \pmod{2}$ 。  $d \equiv 1 \pmod{4}$  なので、 $(c-1)/c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ 。 すなわち、 $c \equiv 1 \pmod{2c_1}$ 。

$c_1 \equiv 1 \pmod{2}$  ならば、 $d \equiv c + (c-1)/c_1 \pmod{2}$ 。  $d \equiv 1 \pmod{4}$  なので、 $c + (c-1)/c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ 。 すなわち、 $(c-1)(c_1-1) \equiv 0 \pmod{2c_1}$ 。 この等式からは、さらに新しい情報は得られない。

以上により、 $d < u$  ならば、 $c > 1$  かつ

$$c \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2c_1} & (c_1 \text{ が偶数のとき}) ; \\ 1 \pmod{c_1} & (c_1 \text{ が奇数のとき})。 \end{cases}$$

逆に、 $c$  がこの条件を満たすときに  $d < u$  が成り立つことは、容易にわかる。しかもこのとき、

$$u = (c_1^6c^4 + 2c_1^4c + c_1^4)d + c_1^4c^6 + 2c_1^4c^5$$

$$+ 2c_1^2c^3 + 6c_1^2c^2 + 2c_1^2c + 1。 \quad \square$$

例 8. 次の場合には  $d < u$  が成り立つようである：

- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (c^3, c^3 + c^2 + c - 1, 1, c^2 - 1)$ ；
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (16c - 8, 28c - 15, 1, 8c - 5)$ ；
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (54c - 27, 78c - 40, 1, 18c - 10)$ 。

以上の場合、

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, c_3, c_4) \\ = (m_1^3 m_2, (m_1^2 + m_1 + 1)m_1 m_2 - 1, \\ 1, m_1^2 m_2 - 1) \end{aligned}$$

の場合として一括して論じることができる。

$$\begin{aligned} u &= q_8 \\ &= m_2^6 m_1^{16} + 2m_2^6 m_1^{15} + 3m_2^6 m_1^{14} + 2m_2^6 m_1^{13} \\ &\quad + (m_2^6 + m_2^4)m_1^{12} + 3m_2^4 m_1^{10} + 2m_2^4 m_1^9 \\ &\quad + 3m_2^4 m_1^8 + 3m_2^2 m_1^6 + 3m_2^2 m_1^4 + 1, \\ q_7 &= m_2^5 m_1^{13} + 2m_2^5 m_1^{12} + 3m_2^5 m_1^{11} \\ &\quad + 2m_2^5 m_1^{10} + (m_2^5 + m_2^3)m_1^9 + 2m_2^3 m_1^7 \\ &\quad + m_2^3 m_1^6 + 2m_2^3 m_1^5 + 2m_2 m_1^3 + m_2 m_1, \\ r_7 &= m_2^4 m_1^{10} + 2m_2^4 m_1^9 + 3m_2^4 m_1^8 + 2m_2^4 m_1^7 \\ &\quad + (m_2^4 + m_2^2)m_1^6 + m_2^2 m_1^4 + m_2^2 m_1^2 + 1, \\ -s_0 &= m_2^3 m_1^7 + 2m_2^3 m_1^6 + 3m_2^3 m_1^5 \\ &\quad + 2m_2^3 m_1^4 + (m_2^3 + m_2)m_1^3 - m_2, \\ d &= m_2^6 m_1^{14} + 4m_2^6 m_1^{13} + 8m_2^6 m_1^{12} + 10m_2^6 m_1^{11} \\ &\quad + (8m_2^6 + 2m_2^4)m_1^{10} + (4m_2^6 + 4m_2^4)m_1^9 \\ &\quad + (m_2^6 + 6m_2^4)m_1^8 + 8m_2^4 m_1^7 \\ &\quad + (8m_2^4 + m_2^2)m_1^6 + 6m_2^4 m_1^5 \\ &\quad + (2m_2^4 + 6m_2^2)m_1^4 + 10m_2^2 m_1^3 \\ &\quad + 9m_2^2 m_1^2 + 6m_2^2 m_1 + (m_2^2 + 4)。 \end{aligned}$$

$m_2 \equiv 0 \pmod{2}$  ならば  $d \equiv 0 \pmod{2}$ 。  $d \equiv 1 \pmod{4}$  なので、  $m_2 \equiv 1 \pmod{2}$ 。

$m_1 = 1$  のときは

$$\begin{aligned} u &= 9m_2^6 + 9m_2^4 + 6m_2^2 + 1, \\ d &= 36m_2^6 + 36m_2^4 + 33m_2^2 + 4 \end{aligned}$$

なので、  $u < d$ 。

$m_1 = 2$  のときは

$$u = 200704m_2^6 + 8960m_2^4 + 240m_2^2 + 1,$$

$$d = 112896m_2^6 + 7392m_2^4 + 289m_2^2 + 4,$$

$$u = d + 87808m_2^6 + 1568m_2^4 - 49m_2^2 - 3。$$

$m_1 \geq 3$  のときは、

$$\begin{aligned} u &= (m_1^2 - 2m_1 + 2)d \\ &\quad + (m_2^6 - m_2^4)(m_1^{12} - m_1^{10} + 2m_1^9 + m_1^8 \\ &\quad + 6m_1^7 + 6m_1^6 + 8m_1^5 + 4m_1^4) \\ &\quad + (m_2^6 - m_2^2)(m_1^8 - 2m_1^7 + 5m_1^6 - 2m_1^5 \\ &\quad - 2m_1^4 + 8m_1^3 + 7m_1^2 + 10m_1 + 2) \\ &\quad + (m_2^6 - 1)(4m_1^2 - 8m_1 + 7) \\ &\quad + m_2^6(m_1 - 3)(m_1^{13} + 3m_1^{12} + 5m_1^{11} \\ &\quad + 7m_1^{10} + 13m_1^9 + 31m_1^8 + 89m_1^7 + 263m_1^6 \\ &\quad + 778m_1^5 + 2328m_1^4 + 6982m_1^3 + 20938m_1^2 \\ &\quad + 62803m_1 + 188407) \\ &\quad + 565212。 \end{aligned}$$

#### 4 見出された族 (3)

その他に見出された族のうち、以下のものについて  $d < u$  が確かに成り立つことを証明することができた。

例 9.  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 2c - 1, c, 1)$  の場合。  $c > 1$  ならば、

$$\begin{aligned} u &= q_8 = 8c^4 + 8c^3 + 12c^2 + 4c + 2, \\ q_7 &= 8c^4 + 4c^3 + 8c^2 + 1, \\ r_7 &= 8c^4 + 6c^2 - 2c + 1, \\ -s_0 &= 8c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 3c + 1, \\ d &= 4c^4 + 4c^2 - 4c + 1 \\ &= (2c^2 + 1)^2 - 4c, \\ u &= 2d + (8c^3 + 4c^2 + 12c)。 \end{aligned}$$

$c = 1$  ならば  $d = 5$  となり、  $l = 1$  となる。

例 10.  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, c^2 + c + 1, c + 1, c)$  の場合。

$$\begin{aligned} u &= q_8 = c^8 + 4c^7 + 13c^6 + 28c^5 + 46c^4 \\ &\quad + 58c^3 + 53c^2 + 34c + 13 \\ q_7 &= c^8 + 4c^7 + 12c^6 + 25c^5 + 38c^4 \\ &\quad + 45c^3 + 38c^2 + 22c + 8 \\ r_7 &= c^8 + 4c^7 + 11c^6 + 22c^5 + 31c^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 34c^3 + 27c^2 + 14c + 5 \\
 -s_0 &= c^8 + 4c^7 + 10c^6 + 19c^5 + 25c^4 \\
 &+ 25c^3 + 19c^2 + 9c + 3 \\
 d &= c^6 + 4c^5 + 10c^4 \\
 &+ 18c^3 + 21c^2 + 14c + 5 \\
 &= (c^3 + 2c^2 + 3c + 3)^2 - 4(c + 1) \\
 u &= (c^2 + 2)d + c^6 + 2c^5 + 5c^4 \\
 &+ 8c^3 + 6c^2 + 6c + 3
 \end{aligned}$$

### 参考文献

- 1) Hashimoto, R. : *Ankeny-Artin-Chowla Conjecture and Continued Fraction Expansion*, J. Number Th., vol. 90, pp. 143–153 (2001).
- 2) 橋本竜太 : 実 2 次体に関する Ankeny-Artin-Chowla 予想と連分数展開, 第 2 回福岡数論研究集会報告集, 79–86 頁 (2008).
- 3) Hashimoto, R. : *Examples of discriminants of quadratic orders with large fundamental units attached to a fixed length of the period of continued fractions*, Proceedings of Algebra and Computation 2007, pp. 78–82 (2008).