（シリーズ）　ガリレオの斜面実験から微分・積分へ
―（その２）　ガリレオ流の微分・積分を模索する―

鎌田　弘*　　小島　隆史**　　上代　良文**　　由良　諭***

Development of Assistant Tool for Learning Derivation and Integration through Galileo's Acceleration Experiment
— (Part 2) Groping of Galileo's-like Derivation and Integration —

Hiroshi KAMADA, Takafumi KOJIMA, Yoshifumi JODAI and Satoshi YURA

Abstract

The series of studies describe development of teaching materials to make a goal of modern derivation and integration basic concept through explanation of Galileo's acceleration experiment. This second report shows teaching materials with respect to analysis of the acceleration experiment using function graph with Cartesian coordinate, the teaching materials are then named "Galileo's-like derivation and integration". The scoring results and review of homework under the teaching materials are also shown.

Keywords : Galileo and Descartes, Galileo's-like Derivation and Integration, Development of Teaching Materials

1.　はじめに

（１）目標

本シリーズでは，高等専門学校２年生が，微分・積分の基本的概念を習得することを目標としている．「(その１) ガリレオの斜面実験をひも解く」ことから始めて，目標を達成するために，その１～その３のシリーズ教材開発を試みる．

その１：ガリレオの斜面実験をひも解く (1)
その２：ガリレオ流の微分・積分を模索する
その３：現代風の微分・積分へのアプローチ

本報告は，上記シリーズ教材その２の開発について述べる．

（２）教材開発の背景

ガリレオが斜面実験をした当時には，ニュートン力学, ニュートン流の微分･積分はまだ成立していなかった．また，直交座標（デカルト座標）上での関数のグラフ表示も数学ツールとしては使われていなかった．

今回の報告では, 微分･積分の基本概念の萌芽がガリレオの斜面実験とガリレオの思索の中にあると筆者らは考え，さらにガリレオとデカルトの出会いを仮想し，ガリレオの斜面実験のデータをデカルト座標上の関数グラフで再構成し，それを解析的に処理した教材の開発を行った．

（３）本シリーズでの数理的処理

ガリレオの幾何学的説明，または論証は我々には難しい．そこで，ガリレオが扱った物理量を，中学校既習の直交座標上での関数グラフを用いて再構成し，その図形量の計算で数理的処理をする．さらに，単位換算は次元解析による．すなわち，「速さv（cm/s）×時間Δt（s）＝移動距離Δy（cm）」の計算では長方形を想定し，その縦の長さに速さv（cm/s)，その横の長さに時間Δt (s)，その面積に移動距離Δy (cm) を対応させる．

2. シリーズ教材その２の授業実践

（１）実践状況

香川高専機械工学科本校 2 年生 42 名の特別活動（キャリア概論）の時間 45 分（令和２年１月 22 日７限目）で実施した．

（ア）授業用教材スライドの要点のプリントを学生に配布し，教材スライド（実施版）をプロジェクターで投影し，説明する方法は一斉授業形式で行った．なお，巻末の付録Ａ（スライド教材）は，一部追補した改良版である．

（イ）授業後にはアンケート「⑴疑問・質問，⑵感

＊ 香川高等専門学校 名誉教授
** 香川高等専門学校 機械工学科
*** 香川高等専門学校 機械電子工学科

想等」を行った.

（ウ）授業内容の理解程度を調べるため,「宿題１(微分)，宿題２（積分)」を課し，回収は後日担任経由で行った.

（２）アンケート結果と宿題の解答状況

（ア）授業後アンケート「(1)疑問・質問, (2)感想等」の学生の自由記述の抜粋は，付録Ｂである.

（イ）授業内容の理解程度を調べた「宿題１(微分)，宿題２（積分)」と，その解答の採点集計表（表1，表2）を以下に示す.

＜宿題１＞　t の区間［$t-h$，$t+h$］で，グラフ $y=t^2$ を考える．点 A'（$t-h$，$(t-h)^2$），点 B'（$t+h$，$(t+h)^2$）として，図形的に線分 A' B' に注目する．ただし，点 T'（t，t^2）とする.

① t の増分 Δt，y の増分 Δy を t と h で表せ.

② 線分 A' B' の傾き（図形量）に対応する平均の速さ $\bar{v}$ （物理量）を t と h で表せ.

③ (i)時刻 t での瞬間の速さ v を t で表せ（ガリレオ流微分法）

(ii) 点 T' で v は図形的に何を意味するか.

④ グラフ $y=t^2$ 上の点 T' で，上の③（ii）の意味を示す直線を描け.

表１　＜宿題１＞の解答採点集計（人数)

	正解	半正解	不正解	合計
①	26	5	11	42
②	10	24	8	42
③　(i)	26	2	14	42
(ii)	9	5	28	42
④	16	10	16	42

＜宿題２＞ グラフ $v=2t$ について, 次の問いに答えよ.

① t の区間［0，t］を４等分割した微小区間 Δt を t で表せ.

② ①のとき，分割点それぞれにおける時刻について「0，$t/4$，□，□，t」の □の時刻を t で表せ.

③ ②の t の分割点に対する瞬間の速さ v の値をいえ．即ち，「0，$t/2$，□，□ ，$2t$」の時刻□での v の値を t で表せ.

④「微小区間 Δt での平均の速さ $\bar{v}$ を計算せよ．即ち，「$t/4$ ，$3t/4$，□，□ 」の時刻□での速さ $\bar{v}$ の値を t で表せ.

⑤ 微小区間 Δt における各微小移動量 Δy を計算せよ．即ち，「$\Delta y=t^2/16$，$3t^2/16$，　□，□」の□の値を t で表せ.

⑥ ⑤から，各 Δy の総和 y の値を求めよ．（ガリレオ流積分法)

表２　＜宿題２＞の解答採点集計（人数)

	正解	半正解	不正解	合計
①	34	0	8	42
②	36	3	3	42
③	39	2	1	42
④	39	2	1	42
⑤	32	4	6	42
⑥	20	8	14	42

（ウ）宿題１，２の解答を採点した筆者の感想を，以下に述べる.

・アンケート記述からは，ほとんどの学生は授業内容を理解できたと楽観しているが，宿題の採点結果から眺めると，理解度の曖昧さが露呈した学生が少なからずいた.

・物理量と図形量との対応関係の理解は，微分の方が積分より難しい.

・ガリレオ流微分法の理解が不十分と思われる学生の割合は，約３割である.

・ガリレオ流積分法の理解が不十分と思われる学生の割合は，約２割である.

・宿題１，２を共に理解できていると思われる学生の割合は，約５割である.

（３）アンケート点検と宿題採点から気付いたこと

（ア）ガリレオ流の微分法について「ガリレオ流の微分法（実施版)」では，図形量の数値計算に偏っていたので，ガリレオ流の微分法概念の理解が不十分な者が多くいたようだ．それが，宿題１の不正解の多さにも表れていた.

（イ）アンケートにも，Δt の取り方を区間［$t-h$，$t+h$］にした理由を知りたいとあった．そこで，筆者の思考過程を追跡した補充教材を提示する必要を感じた. 補充教材について２．(４）に提示する．そのスライドを実施版スライドのスタート個所に追補した．その改良版が付録Ａである.

（ウ）アンケートに，宿題１，２の模範解答の配布を希望する者がいた. 未配布になってしまったが, 担任経由で配布すべきだったと思う.

（４）実施版スライド教材に追補した補充教材

実施版スライド教材のはじめへの追補内容は，つぎの２つである．

１つ目：前回授業の結果を明示し，結果を再確認する．

２つ目：今回授業の結果を提示し，結果への心構を作る．

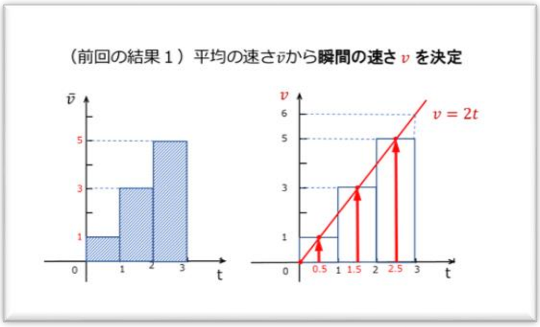
（ア） １つ目（前回授業の結果の明示と再確認）：

●準備：斜面実験のデータと平均の速さ$\bar{v}$の計算表．

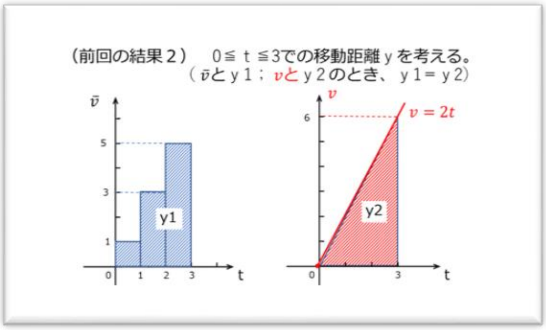

（準備）平均の速さ$\bar{v}$を計算する

青銅球の位置の点	S	A	B	C
点Sからの移動距離y（単位距離の整数倍）	0	1	4	9
点Sからの経過時間の時刻t（単位時間の整数倍）	0	1	2	3
一定時間Δt当たりの移動距離Δy	1	3	5	
時刻と時刻の間の時間Δt（これを一定にする）	1	1	1	
一定時間Δt当たりの平均の速さΔy/Δt＝$\bar{v}$	1	3	5	

●前回の結果１：平均の速さ$\bar{v}$と瞬間の速さvの関係性．

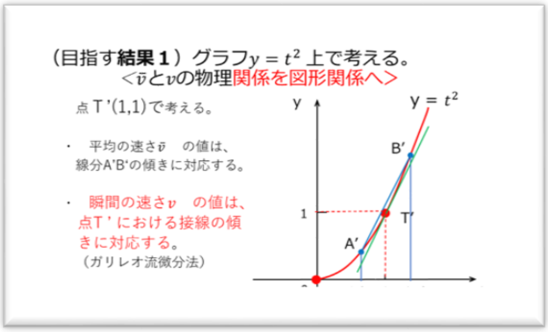


●前回の結果２：瞬間の速さvと移動距離yの関係性．

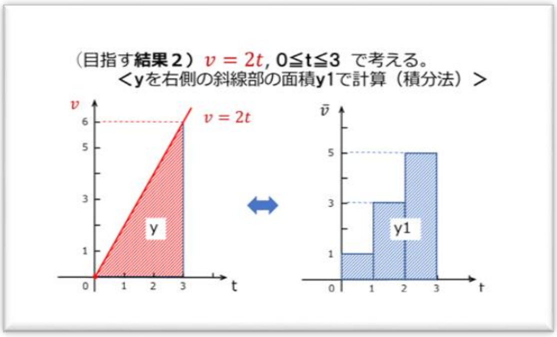


（イ）２つ目（今回授業が目指す結果の提示）：

●目指す結果１：ガリレオ流の微分法を示唆．



●目指す結果２：ガリレオ流の積分法を示唆．



3. おわりに

筆者らの授業経験では，微分・積分の基本概念の理解不足から専門科目の学びで苦労している香川高専２年生がいるのも現状である．その対応策が，本シリーズ教材（その１～その３）であり，数学と専門科目の学びにおける橋渡しになればとの試みである．特に今回の報告（シリーズ教材その２）は，ガリレオの斜面実験（参考文献（2））と思索（参考文献（3））に注目し，その中に微分積分の萌芽を模索した試みである．さらにガリレオとデカルトの出会いを仮想し，ガリレオの斜面実験のデータを直交座標上の関数グラフで再構成し，それを解析的に処理した教材を開発した．そこでの微分・積分の基本概念の扱いをガリレオ流と命名したが，この教材は物理量を図形量として図解説明するのに有効であったと思う．

次回の報告（シリーズ教材その３）では，ガリレオ流の微分・積分から現代風の微分・積分（教科書で習う微分・積分）へ繋がる内容の教材開発を目指す．微分・積分の基本概念に，学生が「改めて気付く」ための教材を開発したい．

教材スライド等の提供

授業用の教材スライド（改良版）は，付録Aに掲示している．授業等での活用を希望される方は，筆者までご連絡をいただきたい．ご提供いたします．

謝辞

本教材での実践の場と時間を提供頂いた当時の機械工学科２年担任，坂本具償教授に感謝の意を表す．

参考文献

（1）鎌田，小島，上代，由良，“（シリーズ）ガリレオの斜面実験から微分・積分へ―（その１）ガリレオの斜面実験をひも解く―”，香川高等専門学校研究紀要第 11 号，2020，pp. 7－12

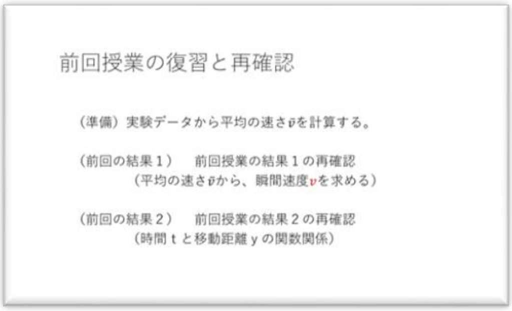
（2）ガリレオ・ガリレイ，今野・日田訳，“新科学対話（下)”，pp. 35－36，第 47 図，岩波文庫，1937

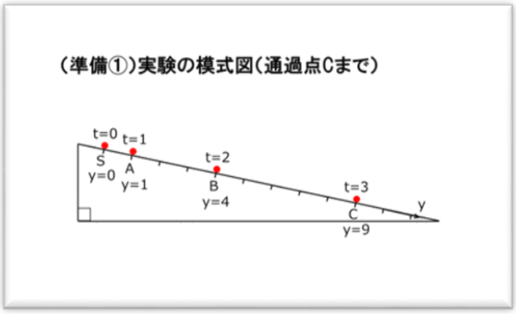
（3）｢ガリレオ・ガリレイ，今野・日田訳，“新科学対話（上)”，岩波文庫，1948

（4）大田，“読むだけ微積分”，学研，2009

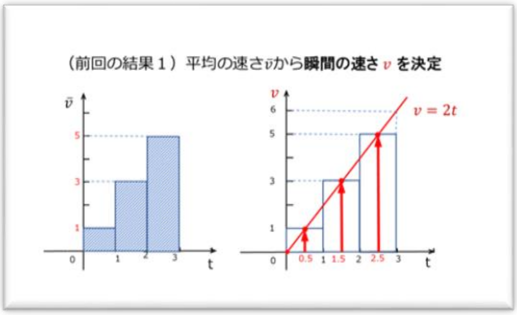
（5）村田，“数学をきずいた人々”，さ・え・ら書房，2008

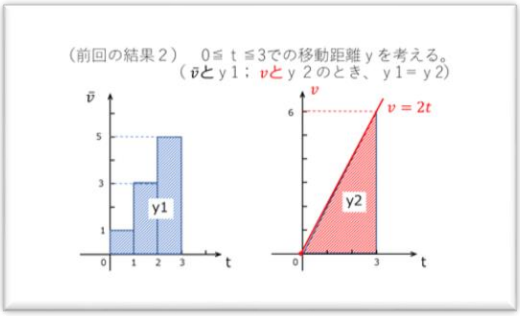
(付録 A)　授業用の教材スライド（講話改良版)

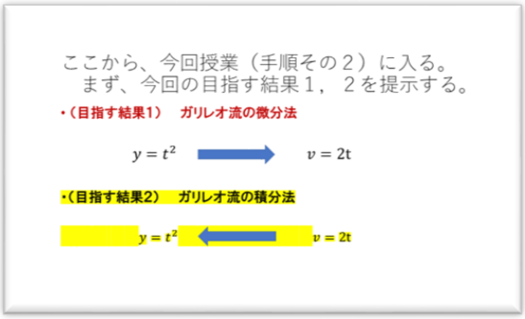


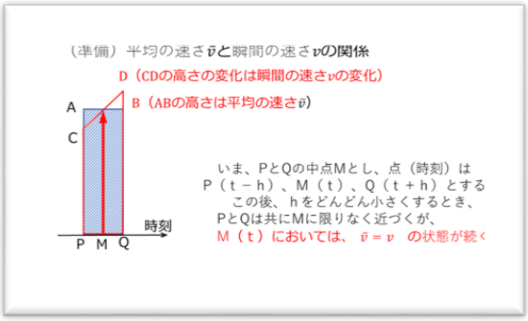


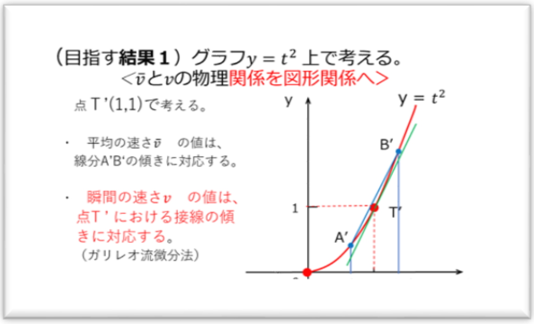
青銅球の位置の点	S		A		B		C
点Ｓからの移動距離ｙ（単位距離の整数倍）	0		1		4		9
点Sからの経過時間の時刻ｔ（単位時間の整数倍）	0		1		2		3
一定時間 Δｔ 当たりの移動距離 Δｙ		1		3		5	
時刻と時刻の間の時間Δｔ（これを一定にする）		1		1		1	
一定時間 Δｔ 当たりの平均の速さ Δｙ/Δｔ＝$\bar{v}$		1		3		5	

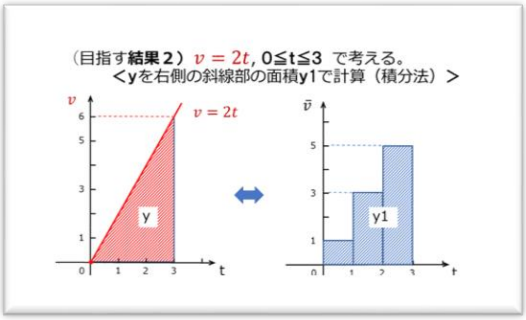


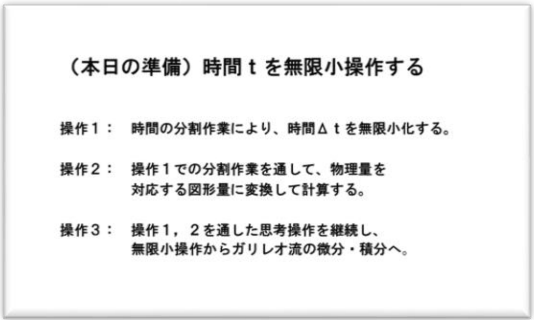


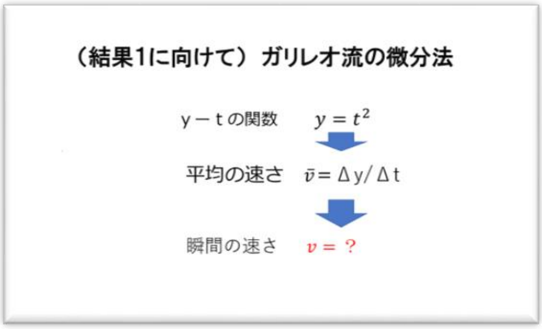


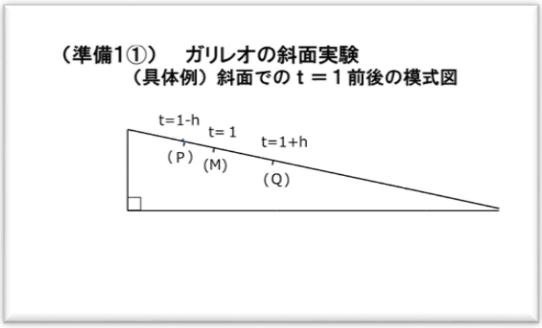


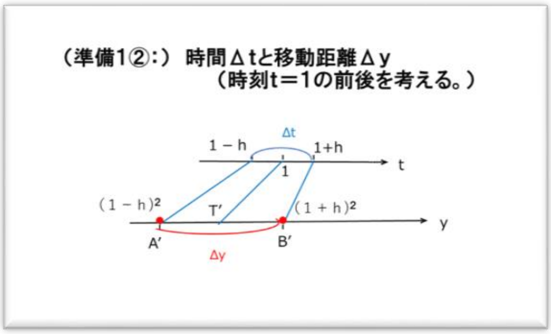


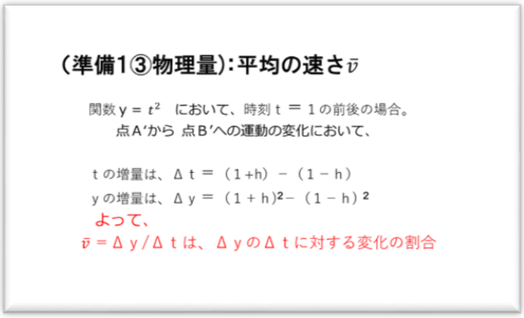


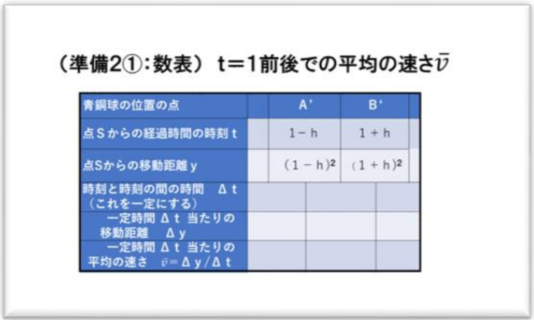




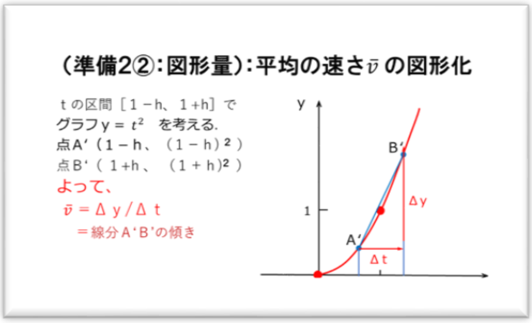


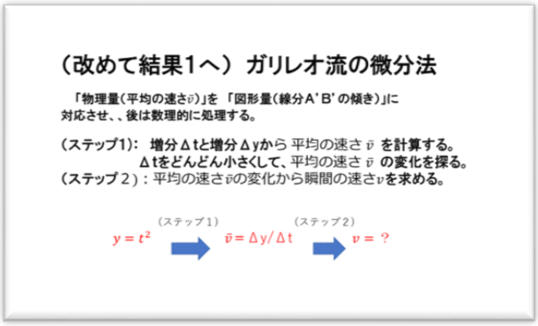


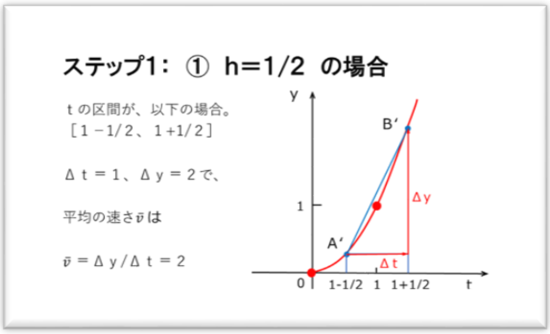


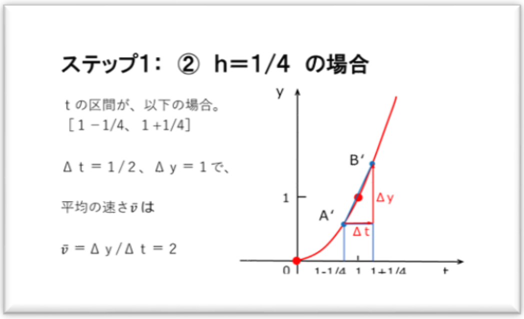


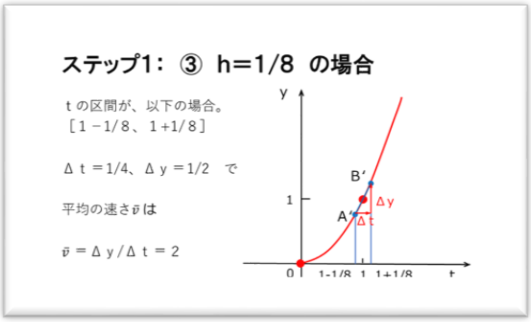
青銅球の位置の点		A'	B'	
点Ｓからの経過時間の時刻ｔ		1− h	1 + h	
点Sからの移動距離ｙ		（1 − h)²	（1 + h)²	
時刻と時刻の間の時間 Δｔ（これを一定にする）				
一定時間 Δｔ 当たりの移動距離 Δｙ				
一定時間 Δｔ 当たりの平均の速さ $\bar{v}$＝Δｙ/Δｔ				

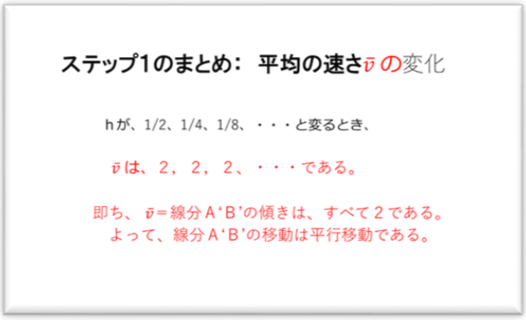


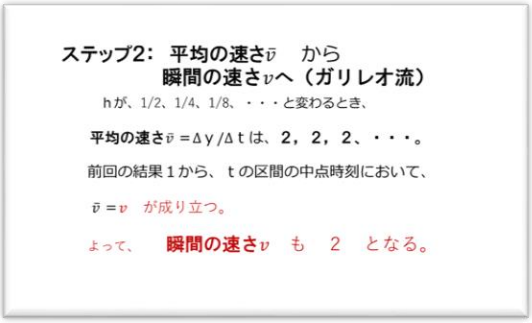


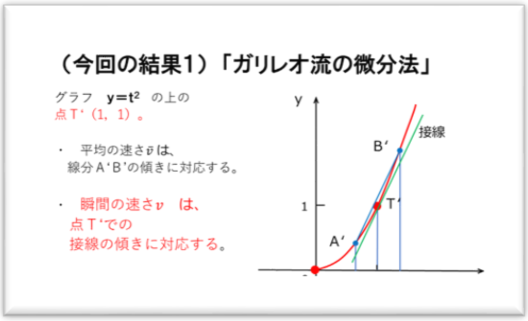


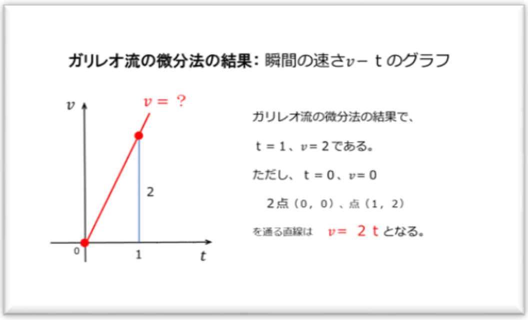

ステップ1： ② h=1/4 の場合
ｔの区間が、以下の場合。
［１－1/4、１+1/4］
Δｔ＝1/2、Δｙ＝１で、
平均の速さ$\bar{v}$は
$\bar{v}$＝Δｙ/Δｔ＝２
y
1
B'
A'
Δy
Δt
0
1-1/4
1
1+1/4
t


ステップ1： ③ h=1/8 の場合
ｔの区間が、以下の場合。
［１－1/8、１+1/8］
Δｔ＝1/4、Δｙ＝1/2　で
平均の速さ$\bar{v}$は
$\bar{v}$＝Δｙ/Δｔ＝２
y
1
B'
A'
Δy
Δt
0
1-1/8
1
1+1/8
t

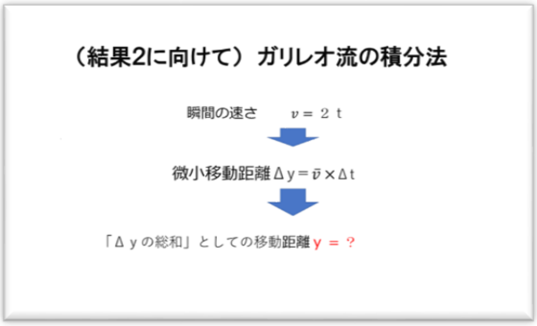

ステップ1のまとめ： 平均の速さ$\bar{v}$ の変化
ｈが、1/2、1/4、1/8、・・・と変るとき、
$\bar{v}$は、２，２，２、・・・である。
即ち、$\bar{v}$＝線分Ａ'Ｂ'の傾きは、すべて２である。
よって、線分Ａ'Ｂ'の移動は平行移動である。

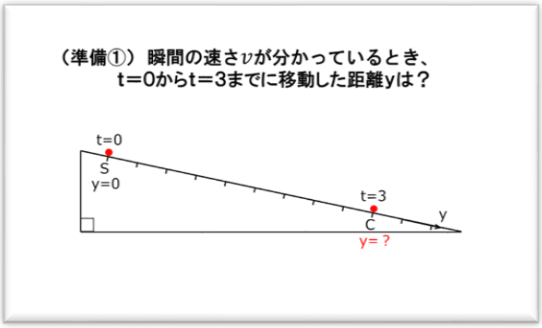

ステップ2： 平均の速さ$\bar{v}$　から
瞬間の速さvへ（ガリレオ流）
ｈが、1/2、1/4、1/8、・・・と変わるとき、
平均の速さ$\bar{v}$＝Δｙ/Δｔは、２，２，２、・・・。
前回の結果１から、ｔの区間の中点時刻において、
$\bar{v}$＝v　が成り立つ。
よって、　瞬間の速さv　も　２　となる。

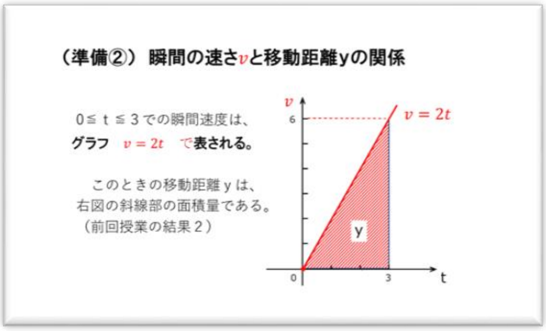

（今回の結果1）「ガリレオ流の微分法」
グラフ　y=t²　の上の
点Ｔ'（1，1）。
・　平均の速さ$\bar{v}$は、
線分Ａ'Ｂ'の傾きに対応する。
・　瞬間の速さv　は、
点Ｔ'での
接線の傾きに対応する。
y
接線
B'
T'
A'
1

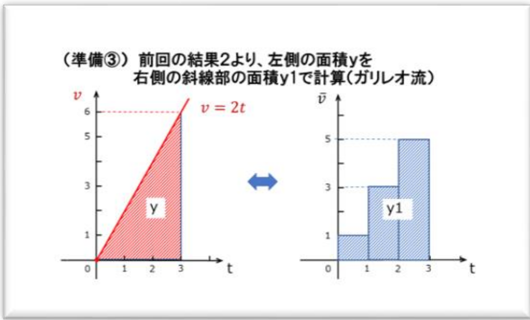

ガリレオ流の微分法の結果：瞬間の速さv－ｔのグラフ
v
v＝？
2
0
1
t
ガリレオ流の微分法の結果で、
ｔ＝１、v＝２である。
ただし、ｔ＝０、v＝０
２点（0，0）、点（1，2）
を通る直線は　v＝ ２ｔとなる。

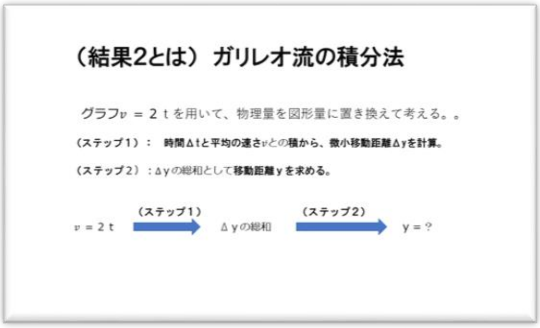

休憩:5分間
・質問・疑問を受付ます。

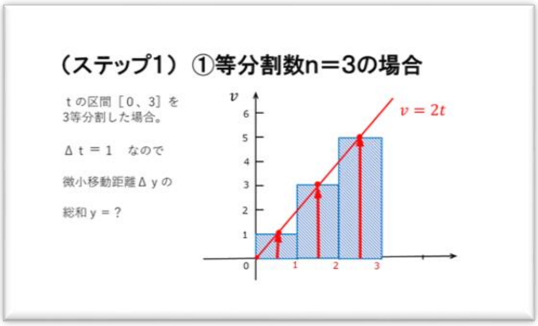

（結果2に向けて）ガリレオ流の積分法
瞬間の速さ　v＝２ｔ
微小移動距離Δｙ＝$\bar{v}$×Δｔ
「Δｙの総和」としての移動距離ｙ＝？

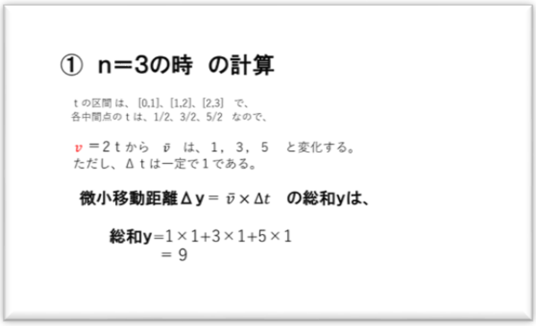

（準備①）瞬間の速さvが分かっているとき、
t=0からt=3までに移動した距離yは？
t=0
S
y=0
t=3
C
y
y=?

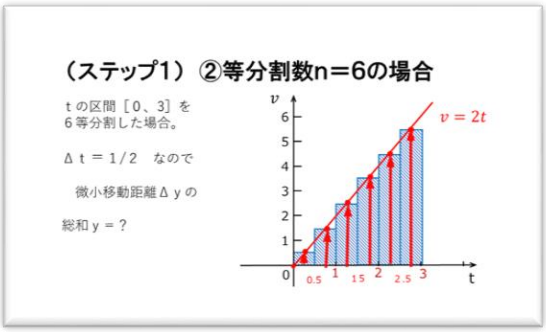

（準備②）瞬間の速さvと移動距離yの関係
0≦ｔ≦３での瞬間速度は、
グラフ　v＝2t　で表される。
このときの移動距離ｙは、
右図の斜線部の面積量である。
（前回授業の結果２）
v
6
v = 2t
y
0
3
t

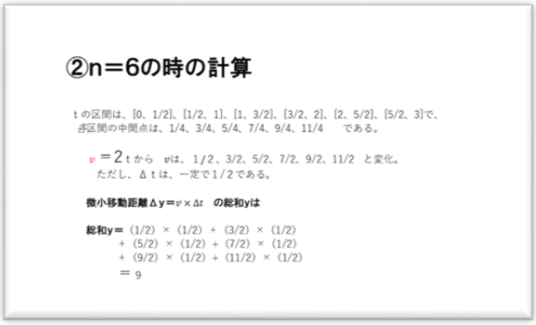

（準備③）前回の結果2より、左側の面積yを
右側の斜線部の面積y1で計算(ガリレオ流)
$v = 2t$
y
y1
t

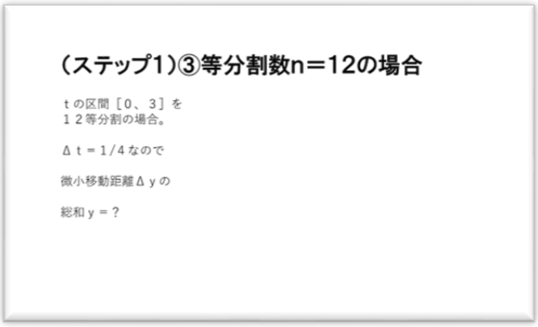

（結果2とは）ガリレオ流の積分法
グラフv = 2 t を用いて、物理量を図形量に置き換えて考える。。
（ステップ1）： 時間Δtと平均の速さvとの積から、微小移動距離Δyを計算。
（ステップ2）：Δyの総和として移動距離ｙを求める。
（ステップ1）
（ステップ2）
v = 2 t
Δｙの総和
y = ?

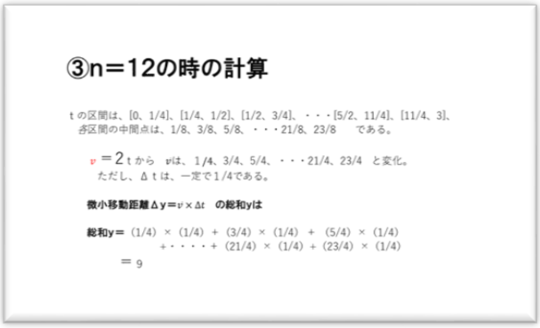

（ステップ1）①等分割数n=3の場合
ｔの区間［0、3］を
3等分割した場合。
Δｔ＝1 なので
微小移動距離Δｙの
総和ｙ＝？
$v = 2t$

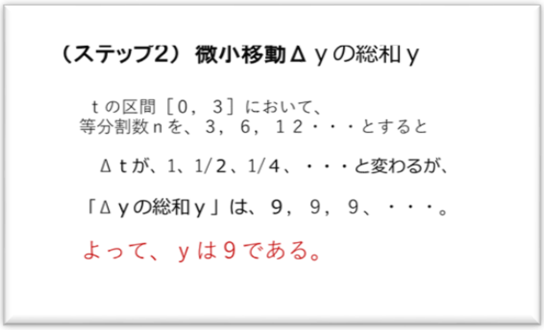

① n=3の時 の計算
ｔの区間 は、［0,1］、［1,2］、［2,3］ で、
各中間点のｔは、1/2、3/2、5/2 なので、
v ＝2ｔから $\bar{v}$ は、1，3，5 と変化する。
ただし、Δｔは一定で１である。
微小移動距離Δｙ＝ $\bar{v} \times \Delta t$ の総和yは、
総和y=1×1+3×1+5×1
＝ 9

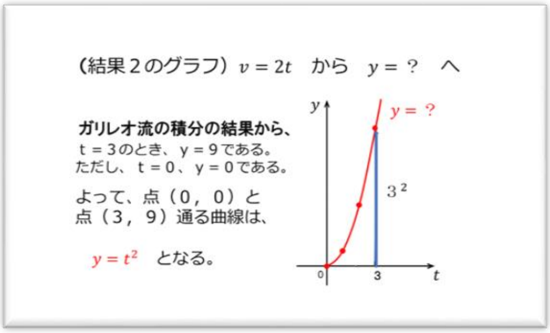

（ステップ1）②等分割数n=6の場合
ｔの区間［0、3］を
6等分割した場合。
Δｔ＝1/2 なので
微小移動距離Δｙの
総和ｙ＝？
$v = 2t$

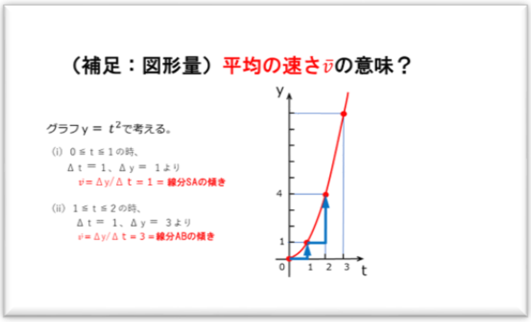

②n＝6の時の計算
ｔの区間は、[0、1/2]、[1/2、1]、[1、3/2]、[3/2、2]、[2、5/2]、[5/2、3]で、
各区間の中間点は、1/4、3/4、5/4、7/4、9/4、11/4 である。
v ＝2ｔから vは、１/２、3/2、5/2、7/2、9/2、11/2 と変化。
ただし、Δｔは、一定で１/２である。
微小移動距離Δｙ＝$v \times \Delta t$ の総和yは
総和y＝（1/2）×（1/2）＋（3/2）×（1/2）
＋（5/2）×（1/2）＋（7/2）×（1/2）
＋（9/2）×（1/2）＋（11/2）×（1/2）
＝ 9

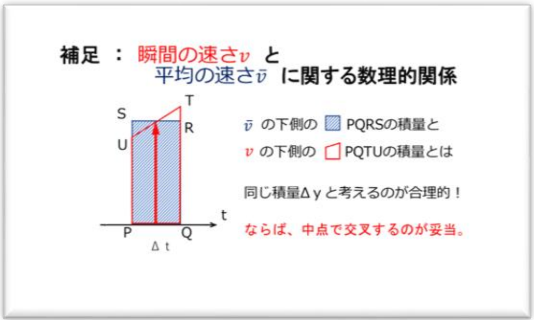

（ステップ1)③等分割数n＝12の場合
ｔの区間［０、３］を
１２等分割の場合。
Δｔ＝1/4 なので
微小移動距離Δｙの
総和ｙ＝？

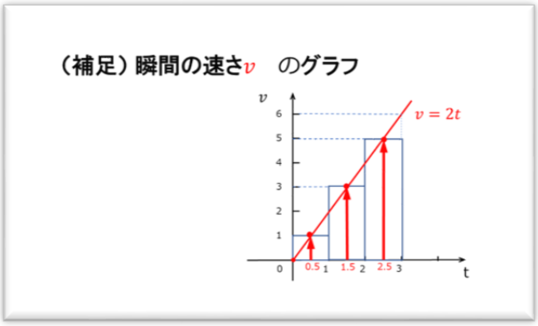

③n＝12の時の計算
ｔの区間は、[0、1/4]、[1/4、1/2]、[1/2、3/4]、・・・[5/2、11/4]、[11/4、3]、
各区間の中間点は、1/8、3/8、5/8、・・・21/8、23/8 である。
v ＝2ｔから vは、１/4、3/4、5/4、・・・21/4、23/4 と変化。
ただし、Δｔは、一定で１/4である。
微小移動距離Δｙ＝$v \times \Delta t$ の総和yは
総和y＝（1/4）×（1/4）＋（3/4）×（1/4）＋（5/4）×（1/4）
＋・・・・・＋（21/4）×（1/4）＋（23/4）×（1/4）
＝ 9

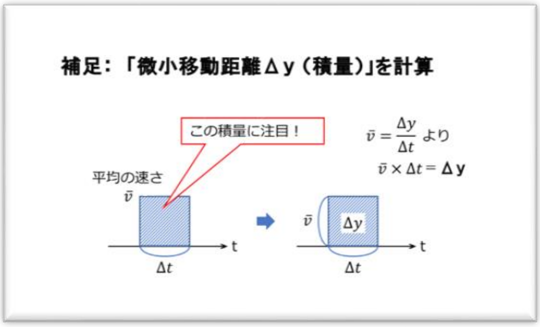

（ステップ2）微小移動Δｙの総和ｙ
ｔの区間［０，３］において、
等分割数ｎを、３，６，１２・・・とすると
Δｔが、1、1/２、1/４、・・・と変わるが、
「Δｙの総和ｙ」は、９，９，９、・・・。
よって、ｙは９である。


（結果２のグラフ）$v = 2t$ から $y = ?$ へ
ガリレオ流の積分の結果から、
ｔ＝３のとき、ｙ＝９である。
ただし、ｔ＝０、ｙ＝０である。
よって、点（０，０）と
点（３，９）通る曲線は、
$y = t^2$ となる。
$y = ?$
3^2









(付録 B)　アンケート回答（一部抜粋）

（1）　疑問・質問を書いて下さい．

- グラフをデカルトはどうやってつくったのか．
- ガリレオ流の微積は，どの様なときに使うと便利なのか．
- ガリレオは，どのような人物ですか．
- デカルトは，何をしたのか．
- Δt を時間 t の $1-h$ と $1+h$ で考える理由は何か．
- 計算の仕方は分かったが，それが何に繋がるのか．
- 微小移動距離とは，なんですか．
- 水時計の約２秒を，単位時間とする理由が分からない．
- $y=t^3$ での微分を考えるとき，ガリレオ流でどうなるのか．
- ガリレオが距離と速さの関係を，どのようにして考えたのか知りたい．

（2）　感想等を書いて下さい．

- デカルト，ガリレオについて，もっと知りたいと思った．
- ガリレオ流の微分・積分は，分かりやすかった．
- どうして微積を考えるのかが分からない．
- 微分・積分の理解が，より深まった．
- 積分も今まで何をしているか分からなかったが，少し理解が深まった．
- $y=t^2$，$t=1$ のとき，$\Delta y/\Delta t=2$ となるのに少し驚いた．
- 今まで曖昧だった微分・積分の正体が分かった．
- ガリレオの考えの中に，微積の萌芽があるとはすごい．
- 微積は大切と思ったので，理解できるようにがんばる．
- ガリレオの考えをデカルトの図形と組み合わせて説明できるのが素晴らしい．
- 積分を微分と結び付けて説明する観点は，面白いと思った．
- 微分と積分の使い方が分からない．
- いい話だった，分かりやすかった．
- 面白かった．すごく良かった．
- 自分には，理解できなかった．少し難しかった．
- シリーズ１，２の宿題１,２の模範解答が欲しい．
- 今日の話は，物理で習った自由落下につながると思った．
- 今日の用語（図形量，等分割数）で戸惑ったが，微積をがんばりたい．
- ガリレオ流の微積を，もっと詳しく知りたい．
- ごり押しの所があったが，面白かった．
- 今日の授業で，微積について色々な事が理解できた．