「ガリレオの斜面実験から現代風の微分・積分へ」を終えて

― その後の雑感と応用例 ―

鎌田　弘*　　由良　諭**　　高橋　洋一***

After Finishing Series “Learning Derivation and Integration through Galileo’s Acceleration Experiment”
― Miscellaneous Impression and Engineering Application Examples ―

Hiroshi KAMADA, Satoshi YURA and Yoichi TAKAHASHI

Abstract

Series of “Learning Derivation and Integration through Galileo’s Acceleration Experiment” as teaching material suggestions have been published on National Institute of Technology Kagawa College Research Bulletin. 90-minute practical mathematics class under the suggestions has been given to applicants of college second year students twice in two days. Mathematics supplementary contents for the above mentioned series and basic derivation and integration application examples of physics, electric engineering and mechanical engineering for students to get used to studying them are described and student questionnaire results are introduced.

Keywords：mean value theorem of derivation, Maclaurin expansion, application examples

1.　はじめに

ガリレオの斜面実験から微分積分へ（その１ [(1)]，その２ [(2)]，その３ [(3)]）を，授業教案として研究紀要に発表してきた．その教案の実践を，香川高専高松キャンパスの卒業生の OB・OG 会（高松工業会）主催で，令和４年９月に香川高専高松キャンパスにおいて，２年生希望者を対象に，90 分×2 日で行った．参加学生４名と参加教員４名，サポート学生２名の少人数であったが，試みとしては有意義であった．そのときの経験や質問から，今回の報告を検討した．その１つが「微分積分の基本公式の導出」であり，もう１つが「微分・積分の専門分野での基本的応用」であった．それらを，「雑感」，「応用例」として取り上げたが，応用例はそれぞれの共著者が担当した．

2.　２つの雑感

2-1　微分・積分の基本公式を導く

2-1-1　運動している自動車の瞬間の速さvと時刻ｔの関数関係

時刻ｔでの瞬間の速さ$v(t)$は，図１の縦の長さの線量の関数値である．このとき時間［0，t］での自動車の移動距離ｙ(t)は，図１の斜線部の積分量で表わされる．よって $y(t)=\int_0^t v(t)dt$， $y(a)=\int_0^a v(t)dt$， $y(b)=\int_0^b v(t)dt$，となるので，時間［a，b］での移動量 $y(b)-y(a)$ は $\int_a^b v(t)dt$ となり，図２の斜線部の積分量である．

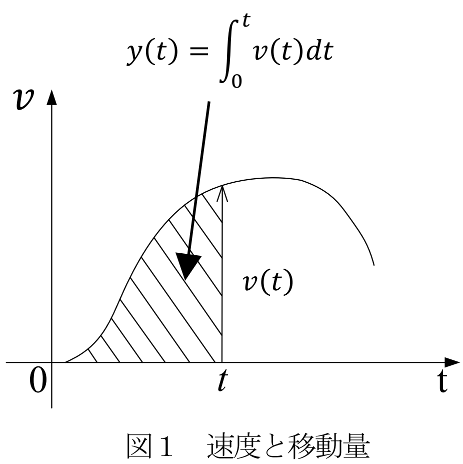


図１　速度と移動量

* 香川高等専門学校 名誉教授
** 香川高等専門学校 機械電子工学科
*** 香川高等専門学校 機械工学科

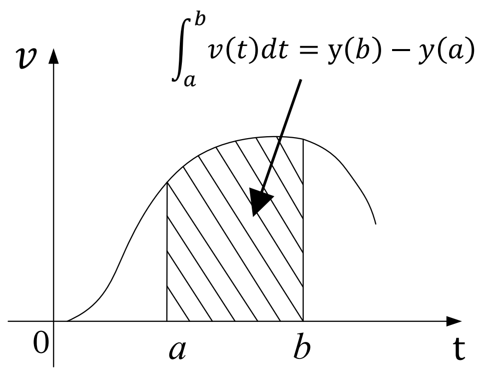


図２　時間［a，b］の速度と移動量

2-1-2　運動している自動車の移動距離 y と時間 t の関数関係

時間［0，t］での自動車の移動距離 y(t)は，図３の縦の長さの線量の関数値で表わされる．よって時間［a，b］での移動量 y(b)－y(a)は，関数量の差になるので図４の縦の長さの線量で表せる．このとき，dy/dt＝v(t) である．

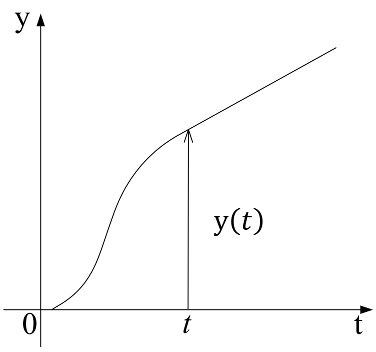


図３　移動量と時間の関係

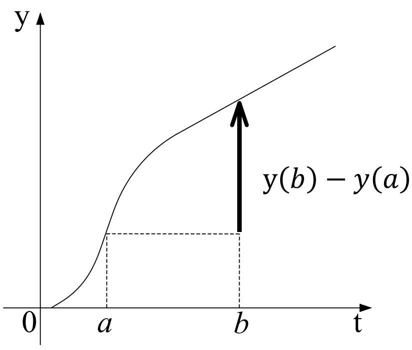


図４　時間［a，b］の移動量

2-1-3　微分・積分の基本公式の導出

上述の物理的な解釈 2-1-1 と 2-1-2 から，次の公式が成り立つ．

$$\int_a^b v(t)dt = y(b) - y(a) \quad \cdots(1)$$

ただし，$dy/dt = v(t)$ である．このとき，$y(t)$を$v(t)$の原始関数という．厳密には，d(定数)/dt = 0なので，$y(t)$ +（定数）を$v(t)$の原始関数という．

2-2　積分と微分の平均値の定理

独立変数 t の滑らかな連続関数$v(t)$として，図解的に考える．

2-2-1　積分の平均値の定理と図解（図５参照）

積分区間［a，t］での積分量は$\int_a^t v(t)dt$なので，積分区間の中間点ξを適当にとると，$v(\xi)(t-a)$の積量に等しくなる．よって，

$$\int_a^t v(t)dt = v(\xi)(t-a) \quad \cdots(2)$$

となる．ただし，$a \leqq \xi \leqq t$ である．

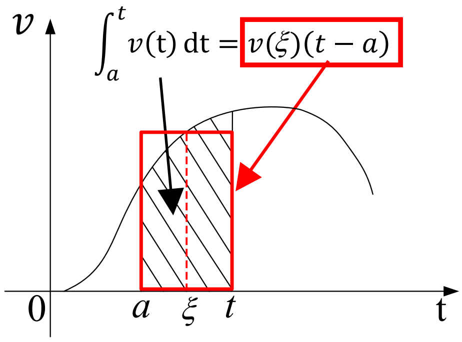


図５　積分の平均値の定理

2-2-2　微分の平均値の定理と図解（図６参照）

区間［a，t］での線分ＡＢの傾きは，$\{y(t)-y(a)\}/(t-a)$である．区間の中間点ξを適当にとると，点Ｔ（ξ，y(ξ)）で線分ＡＢに平行な接線がひけ，その接線の傾きは$\dot{y}(\xi)$である．よって，$\dot{y}(\xi) = \{y(t)-y(a)\}/(t-a)$となる．ただし $a \leqq \xi \leqq t$ である．このとき，図５と図６のξは同じ値となる．

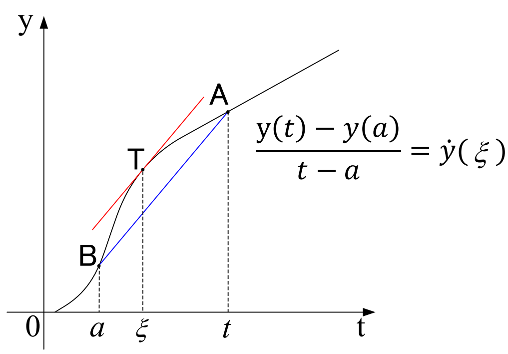


図６　微分の平均値の定理

2-2-3　微分の平均値の定理の別表記

独立変数 t の関数 y(t)を，xの関数 $\mathrm{h}(x)$ に置き変え，区間［a，x］における「微分の平均値の定理」を以下の様な表記とする．

$$\{\mathrm{h}(x)-\mathrm{h}(a)\}/(x-a)=\dot{\mathrm{h}}(\xi) \qquad \cdots(3)$$

ただし$a \leqq \xi \leqq x$である．このとき$\dot{\mathrm{h}}(\xi)$は$x=\xi$における微分係数である．

3.　応用１：　テイラー展開とマクローリン展開

独立変数 x の滑らかな連続関数 f（x)を，小区間［a，x］で考える．べき関数の基本系を 1, $x-a$,（x−a)²/2!,（x−a)³/3!, …として，任意の関数f(x)をべき関数の基本系の和（テイラー展開）として導出する．すなわち

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)\{(x-a)^2/2!\}\right.$$
$$\left.+\cdots+\mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}(a)\{(x-a)^{\mathrm{n}-1}/(\mathrm{n}-1)!\}\right]$$
$$+\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\xi)\{(x-a)^{\mathrm{n}}/\mathrm{n}!\} \qquad \cdots(4)$$

である．ただし，$\dot{\mathrm{f}}(a)$，$\ddot{\mathrm{f}}(a)$，…，$\mathrm{f}^{(\mathrm{m})}(a)$ は点 a での１次，２次，m次の微分係数である．

3-1　べき関数の基本系

べき関数の基本系を考えるため以下の準備をする．

3-1-1　（準備１）関数g(x)の導関数$\dot{\mathrm{g}}$(x)

$\mathrm{g}(x)=$(定数)のとき$\dot{\mathrm{g}}(x)=0$ ，$\mathrm{g}(x)=(x-a)$ のとき$\dot{\mathrm{g}}(x)=1$ ，$\mathrm{g}(x)=(x-a)^2$ のとき$\dot{\mathrm{g}}(x)=2(x-a)$ ，$\mathrm{g}(x)=(x-a)^3$ のとき$\dot{\mathrm{g}}(x)=3(x-a)^2$である．

3-1-2　（準備２）任意の３次関数 f（x)の展開

仮に，べき関数の基本系を 1，$x-a$，$(x-a)^2$，$(x-a)^3$として，$\mathrm{f}(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}(x-a)+\mathrm{C}(x-a)^2+\mathrm{D}(x-a)^3$ の展開を考える．$\dot{\mathrm{f}}(x)=\mathrm{B}+2\mathrm{C}(x-a)+3\mathrm{D}(x-a)^2$ ，$\ddot{\mathrm{f}}(x)=2\mathrm{C}+6\mathrm{D}(x-a)$ ，$\mathrm{f}^{(3)}(x)=6\mathrm{D}$ となるので，$\mathrm{f}(a)=\mathrm{A}$, $\dot{\mathrm{f}}(a)=\mathrm{B}$, $\ddot{\mathrm{f}}(a)=2\mathrm{C}$, $\mathrm{f}^{(3)}(a)=6\mathrm{D}$ を用いると定数 A，B，C，D は，$\mathrm{A}=\mathrm{f}(a)$，$\mathrm{B}=\dot{\mathrm{f}}(a)$，$\mathrm{C}=\ddot{\mathrm{f}}(a)/2!$，$\mathrm{D}=\mathrm{f}^{(3)}(a)/3!$ である．よって展開式(５)式となる．

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)\{(x-a)^2/2!\}$$
$$+\mathrm{f}^{(3)}(a)\{(x-a)^3/3!\} \qquad \cdots(5)$$

3-1-3　べき関数の基本系の再考

3-1-2 の結果より，べき関数の基本系をあらためて，1，$x-a$，（x−a)²/2! ，（x−a)³/3!，…，(x−a)ᵏ/k! とする．

3-2　任意の関数 f(x)のテイラー展開

3-2-1　（準備） g (x)の原始関数 G(x)，すなわち，$\dot{\mathrm{G}}(x)=\mathrm{g}(x)$

$\mathrm{g}(x)=0$のとき$\mathrm{G}(x)=\mathrm{C}$ ，$\mathrm{g}(x)=$定数 k のとき $\mathrm{G}(x)=\mathrm{k}(x-a)+\mathrm{C}$ ，$\mathrm{g}(x)=\mathrm{k}(x-a)$ のとき $\mathrm{G}(x)=\mathrm{k}\{(x-a)^2/2\}+\mathrm{C}$ ，$\mathrm{g}(x)=\mathrm{k}(x-a)^2$のとき，$\mathrm{G}(x)=\mathrm{k}\{(x-a)^3/3\}+\mathrm{C}$ である．

3-2-2　任意関数 f (x)の$(x-a)$の項までの近似展開

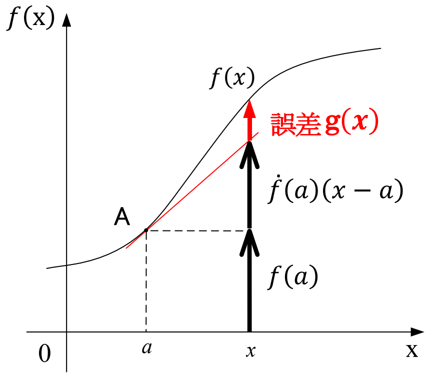
べき関数の基本系を 1，$x-a$とすると関係式は次式となる(図７(a)参照)．

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)\right]+\mathrm{g}(x) \qquad \cdots(6)$$

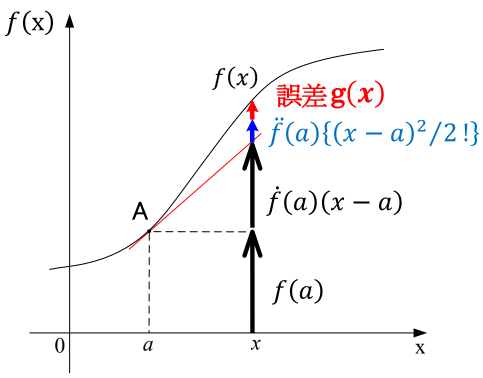
誤差g(x)は $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)-\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)\right]$となり，$\dot{\mathrm{g}}(x)=\dot{\mathrm{f}}(x)-\dot{\mathrm{f}}(a)$である．ここで両辺を$(x-a)$で割り，$\dot{\mathrm{g}}(x)/(x-a)=\{\dot{\mathrm{f}}(x)-\dot{\mathrm{f}}(a)\}/(x-a)$において$\dot{\mathrm{f}}(x)$の平均値の定理を使うと，$\ddot{\mathrm{f}}$ (ξ)に等しくなる中間点ξが存在するので，微分方程式 $\dot{\mathrm{g}}(\mathrm{x})=\ddot{\mathrm{f}}(\xi)(x-a)$を得る．さらに，$\dot{\mathrm{g}}(x)$の原始関数g($x$)を境界条件$\mathrm{g}(a)=0$として求めると，$\mathrm{g}(x)=\ddot{\mathrm{f}}(\xi)\{(x-a)^2/2\}$ となる．よってf(x)は

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)\right]+\ddot{\mathrm{f}}(\xi)\left\{(x-a)^2/2!\right\} \qquad \cdots(7)$$

と展開できる．



(a)　一次近似と誤差



(b)　二次近似と誤差

図７　テイラー展開による関数近似

3-2-3　任意関数 $\mathrm{f}(x)$ の $(\mathrm{x}-a)^2/2!$ の項までの近似展開(図7(b)参照)

べき関数の基本系を 1, $\mathrm{x}-a$, $(x-a)^2/2!$ とするので関係式は次式となる.

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)\ \left\{\left(x-a\right)^2/2!\right\}\right] +\mathrm{g}(x) \quad \cdots(8)$$

よって誤差 $\mathrm{g}(x)$ は

$$\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x) -\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(\mathrm{x}-a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)\left\{\left(x-a\right)^2/2!\right\}\right] \quad \cdots(9)$$

となる. $\dot{\mathrm{g}}(\mathrm{x})=\dot{\mathrm{f}}(\mathrm{x})-\{\dot{\mathrm{f}}(a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)(x-a)\}$, さらに $\ddot{\mathrm{g}}(\mathrm{x})=\ddot{\mathrm{f}}(\mathrm{x})-\ddot{\mathrm{f}}(a)$ となる. ここで両辺を $(\mathrm{x}-a)$ で割り, $\ddot{\mathrm{g}}(x)/(x-a)=\{\ddot{\mathrm{f}}(x)-\ddot{\mathrm{f}}(a)\}/(x-a)$ について $\ddot{\mathrm{f}}(x)$ の平均値の定理を使うと, $\mathrm{f}^{(3)}(\xi)$ に等しくなる中間点 ξ が存在する. よって $\ddot{\mathrm{g}}(x)=\mathrm{f}^{(3)}(\xi)(x-a)$ を得る. ここで $\ddot{\mathrm{g}}(x)$ の原始関数 $\dot{\mathrm{g}}(x)$ を境界条件 $\dot{\mathrm{g}}(a)=0$ として求めると, $\dot{\mathrm{g}}(x)=\mathrm{f}^{(3)}(\xi)\{(x-a)^2/2\}$ となる.さらに $\dot{\mathrm{g}}(x)$ の原始関数 $\mathrm{g}(x)$ を境界条件 $\mathrm{g}(a)=0$ で解くと, $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}^{(3)}(\xi)\{(x-a)^3/6\}$ を得る. よって, 実用性の高い次式を得る.

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)+\ddot{\mathrm{f}}(a)\ \left\{\left(x-a\right)^2/2!\right\}\right] +\mathrm{f}^{(3)}(\xi)\{(x-a)^3/3!\} \quad \cdots(10)$$

3-2-4　任意関数 $\mathrm{f}(x)$ の $(x-a)^{\mathrm{n}-1}/(n-1)!$ の項までの近似展開

べき関数の基本系を 1, $x-a$, $\left(x-a\right)^2/2!$, $(x-a)^3/3!$, $\cdots(x-a)^{\mathrm{n}-1}/(n-1)!$ とし, 誤差 $\mathrm{g}(x)$ を次式とする.

$$\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)-\left[\mathrm{f}(a)+\dot{\mathrm{f}}(a)(x-a)\right. +\ddot{\mathrm{f}}(a)\left\{\left(x-a\right)^2/2!\right\}+\mathrm{f}^{(3)}(a)\left\{\left(x-a\right)^3/3!\right\}+ \left.\cdots+\ \mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}(a)\{(x-\mathrm{a})^{\mathrm{n}-1}/(n-1)!\}\right] \quad \cdots(11)$$

(11)式を $n-1$ 回まで微分し, 3-2-3 と同様の操作を繰り返すと(4)式を得る.

3-3　マクローリン展開と近似式

まず, マクローリン展開を述べる. 独立変数 x の小区間［a, x］でのテイラー展開を, a を 0 として［0, x］での展開を記述する. (4) 式より

$$\mathrm{f}(x)=\left[\mathrm{f}(0)+\dot{\mathrm{f}}(0)x+\ddot{\mathrm{f}}(0)\{x^2/2!\}+\cdots +\mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}(0)\{x^{\mathrm{n}-1}/(\mathrm{n}-1)!\}\right] +\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\xi)\{x^{\mathrm{n}}/\mathrm{n}!\} \quad \cdots(12)$$

がマクローリン展開である. ただし, $\mathrm{n}\to\infty$ のとき $x^{\mathrm{n}}/\mathrm{n}!\to 0$ である. 以下工学的応用でよく用いられるマクローリン近似式 (2 次の項まで) を示す.

3-3-1　$1/(1+x)$ に関する近似式

$1/(1+x)=1-x+x^2-x^3\cdots$ より $1/(1+x)=1-x+x^2$ である.

3-3-2　三角関数 ($\cos x$, $\sin x$) に関する近似式

x はラジアンとすると $\sin x=x-x^3/3!+x^5/5!-\cdots$ より $\sin x=x$, $\cos x=1-x^2/2!+x^4/4!-\cdots$ より, $\cos x=1-x^2/2!$ である.

3-3-3　指数関数 $\exp(x)$ に関する近似式

ここで $\exp(x)$ はネピア常数 e の指数関数である. $\exp(x)=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$ より, $\exp(x)=1+x+x^2/2$ である.

3-3-4　対数 $\log(1+x)$ に関する近似式

ここで対数 log は e を底とする自然対数とする. $\log(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-\cdots$ より, $\log(1+x)=x-x^2/2$ である.

4.　応用２：回路理論の微分積分 (4) (5)

回路受動素子抵抗 R, コンデンサ C, コイル L を用いて回路理論における微分積分について解説する. RCL 直列回路の例題を通して, R, C, L の電圧と電流の関係式を示しながら電圧や電流の方程式には微分と積分を含む式として表現されることを示す.

4-1　RCL 直列回路の例題

例題：電圧 $v(t)$(V)が印加された RCL 直列回路に流れる電流を $i(\mathrm{t})$(A)とする. 回路における電流と電圧の関係式を導出せよ. 簡単のためコンデンサ両端の電圧とコイルに流れる電流の初期値はそれぞれ 0 とする.

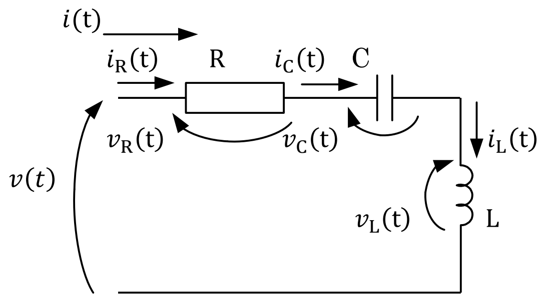


図８　RCL 直列回路

（解説）

①抵抗Rにおける電圧$v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$と電流$i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$の関係式

$$v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = \mathrm{R}i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(13)$$

②コンデンサCにおける電圧$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$と電流$i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$の関係式

$$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\mathrm{C}}\int i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})\,dt \quad \cdots(14)$$

③コイルLにおける電圧$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$と電流$i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$の関係式

$$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = \mathrm{L}\frac{di_{L}(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(15)$$

キルヒホッフの第１法則・第２法則より

$$i(\mathrm{t}) = i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) = i_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(16)$$
$$v(\mathrm{t}) = v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) + v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) + v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(17)$$

であるから，(13)～(17)式より$v(t)$と$i(\mathrm{t})$の関係式は

$$v(\mathrm{t}) = \mathrm{R}i(\mathrm{t}) + \frac{1}{\mathrm{C}}\int i(\mathrm{t})\,d\mathrm{t} + \mathrm{L}\frac{di(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(18)$$

なる微分式と積分式が混在する方程式として表される．(18)式の第１項から第３項は受動素子R，C，Lそれぞれの電圧・電流特性を示している．実際に(18)式の解を得るには，両辺を微分した２次微分方程式が用いられる．

$$\frac{dv(\mathrm{t})}{dt} = \mathrm{L}\frac{di^{2}(\mathrm{t})}{dt^{2}} + \mathrm{R}\frac{di(\mathrm{t})}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}}i(\mathrm{t}) \quad \cdots(18)'$$

以下各素子の電圧・電流特性について解説する．

4-2　抵抗R

抵抗R(Ω)両端の電圧を$v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$（V），流れる電流を$i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$（A）とすると，$v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$と$i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$の関係式はオームの法則より

$$v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = \mathrm{R}i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(19)$$

または

$$i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = \frac{v_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})}{\mathrm{R}} \quad \cdots(20)$$

である．(16)式を考慮すると(19)式は(13)式と(18)式第１項に等しいことがわかる．

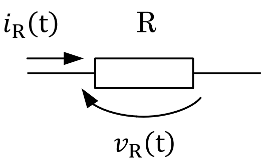


図９　抵抗の電圧と電流

4-3　コンデンサC

電荷量$q(\mathrm{t})$（C）を用いると電流$i(\mathrm{t})$（A）の定義式は

$$i(\mathrm{t}) = \frac{dq(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \quad \cdots(21)$$

である（例えば，$q(\mathrm{t})$の変化（電荷の移動と考えて良い）が時間tに対し一定であれば電流は直流となる）．コンデンサの静電容量C（F），コンデンサに蓄えられる電荷量$q(\mathrm{t})$，およびコンデンサにかかる電圧$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$（V）の関係式は

$$q(\mathrm{t}) = \mathrm{C}v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(22)$$

で表される．(22)式を(21)式に代入すると，コンデンサに流れる電流$i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$や，かかる電圧$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})$は，

$$i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) = \mathrm{C}\frac{dv_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(23)$$

$$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\mathrm{C}}\int i_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})\,dt \quad \cdots(24)$$

と表すことができる．(16)式を考慮すると(24)式は，(14)式と(18)式第２項に等しい．また，コンデンサに電圧が印加される以前（例えば電圧源のスイッチがOFFのとき）に電荷が蓄えられている場合，初期値として(23)(24)式に影響を与える．

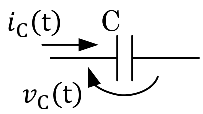


図10　コンデンサの電圧と電流

4-4　コイルL

電磁気学におけるファラデーの電磁誘導に関する法則では，巻数Nのコイルに交わる磁束Φ(t)(Wb)（コイル１巻当りの磁束）とコイル両端に発生する電圧（自己誘導による起電力）$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})$（V）の関係式は，

$$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = -\mathrm{N}\frac{d\Phi(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \quad \cdots(25)$$

となる．(25)式の負符号はレンツの法則によるもので，磁束の増減を妨げる方向に電流が流れる（起電力が発生する）ことを表す．ここで，巻数Nのコイルに交わる全磁束は流れる電流$i_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})$(A)に比例するため，比例定数L(H)を導入して

$$\mathrm{N}\Phi(\mathrm{t}) = \mathrm{L}i_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) \quad \cdots(26)$$

とする．(26)式を(25)式に代入すると

$$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = -\mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(27)$$

となる．回路理論では，定数Ｌを自己インダクタンスと呼び，コイル両端に発生する電圧$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})$と電流$i_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})$の方向は逆向きと定義して（図 11 参照）(27)式の負符号をキャンセルして(28)式を用いる．

$$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = \mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(28)$$

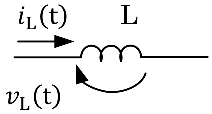


図 11　コイルの電圧と電流

(27)式の負符号を取り去ることで，例えば(23)式と(28)式が符号を考慮しない双対の関係となり電圧と電流の関係式が扱いやすくなっている． １つのコイルに電源（例えば電流源）が接続されている場合，コイルに流れる電流$i_L(\mathrm{t})$やコイルにかかる電圧$v_{\mathrm{L}}(t)$をあらためて以下の式で表す．

$$i_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\mathrm{L}}\int v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})\,dt \quad \cdots(29)$$

$$v_{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) = \mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(\mathrm{t})}{dt} \quad \cdots(30)$$

コイルに電源が接続される以前に交わる磁束が存在する場合，初期値として(29)(30)式に影響を与える．(16)式を考慮すると(30)式は，(15)式と(18)式第 3 項に等しい．

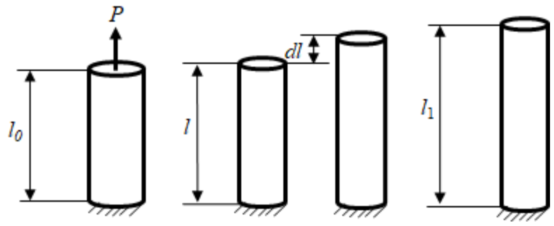
4-5　まとめ

回路理論における微分式・積分式について解説した．RCL 直列回路の例題解説で示したように 4-2～4-4 節の各素子電圧・電流特性より，数学のように微分式や積分式を単体で解くのではなく，微分式や積分式が混在した方程式，つまり(18)’ 式のような高次微分方程式を解くことが多くなる．微分方程式の解法については高専第 3 学年より学ぶが，微分式や積分式単体の解法がわかっていれば微分方程式解法のより深い理解が期待できる．また高専第 4 学年以降では応用数学の手法（ラプラス変換など）を用い，比較的簡単に微分方程式を解くことができるようになる．応用数学は工学的問題を解く重要なカギとなるので，学生は高専低学年での微分積分を十分に理解・学習してほしい．

5.　応用 3：機械系科目で扱う積分

本項では，著者のひとりが担当する加工学で取り扱う積分について，数学で学習する積分と関連付けて述べる. 加工学は, 機械工学科 3 年生の専門科目であり，鋳造，溶接，塑性加工，切削及び研削の各加工法を取り扱っている．これらの各種の加工法や工作機械の基礎を理解し，工作物に対して最適な加工方法を選択できる能力を養うことを目標としている．本科目は，工作実習とも深く関連する実際的な科目であり，同じ学年で学習する材料力学や工業力学と比べて，数学的な取り扱いが少ない科目である．本科目で学習する内容のうち，塑性加工では，簡単な積分の考え方を使う内容がある．しかし，数学的には簡単な問題であっても塑性加工に適用した場合，多くの学生が答えられないことが多々あった. そこで, この原因を考えるために，簡単なアンケート調査を受講生に行い，数学で学習する積分と専門教科で取り扱う積分の関係性について考察する．

加工学で取り扱う積分の一例として，塑性加工の単元で学習する公称ひずみ，真ひずみついて述べる．ここで, 図 12 に示すような初期長さ l_0 の丸棒の片側を固定し, もう一方に引張荷重 P が作用して, 長さ l_1 になった時の公称ひずみ ε_N は (31)式のようになる．公称ひずみは，初期長さを基準としたもので，変形前後の長さの変化(l_1-l_0)を初期長さ l_0 で除すことで求めることができる．一方，真ひずみ ε は，図 12 の変形前の長さ l_0 から変形後の長さ l_1 に至るまでの微小なひずみの増加量(dl/l)の総和であり，(32)式のように求まる．すなわち，図 12 (b)に示すように，ある瞬間における長さ l と微小伸び dl から求まる単位長さあたりの瞬間伸びを積分したものである．



(a)変形前　(b)変形途中　(c)変形後
図 12　丸棒の引張

$$\varepsilon_N = \int_{l_0}^{l_1}\frac{dl}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad \cdots(31)$$

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1}\frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) \quad \cdots(32)$$

上記に示した (32)式を導くために, dl/l の積分について授業中に質問すると多くの学生は答えることができない．一方で，$1/x \cdot dx$ の積分では，ほとんどの学生が $\log x$ であると解答することができる．変数が x から l に変わっただけあるが, 数学の授業で習う(33)式に示すような積分公式としての印象が強く, (32)式を全く違っ

た式であると考えている学生が多いように思われる．また，dl/l を積分するという工学的意味を理解できていない学生もいると考えられる．

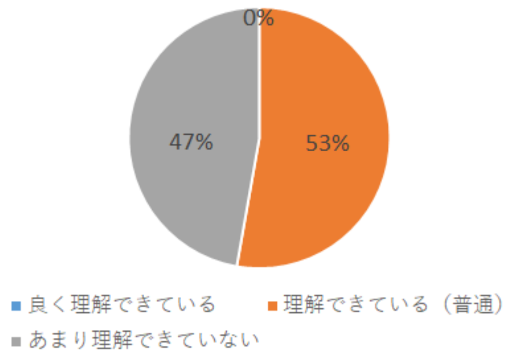
$$\int \frac{1}{x} dx = \log\ x \quad \cdots(33)$$

この原因を考えるために加工学の授業を受けている学生にアンケート調査を実施した．アンケートの質問と選択肢は，以下の 5 項目とし，36 名の学生が回答した．

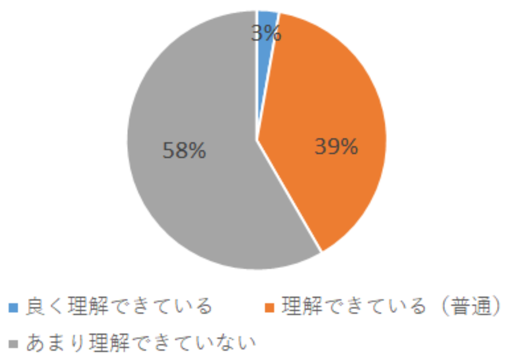
<アンケートの設問と選択肢>

1. 数学で習う微分積分の理解度は？
   よく理解できている・理解できている(普通)・あまり理解できない
2. 専門科目で習う微分積分の理解度は？
   よく理解できている・理解できている(普通)・あまり理解できない
3. 数学で習う微分積分と専門教科で使う微分積分が自分の中で関連付けられているか？
   はい・いいえ
4. 数学の微分積分で使う変数と専門科目で使う微分積分の変数が異なると戸惑うか？
   はい・いいえ
5. 数学と専門科目の微分積分について，何か意見はあるか？
   自由記述

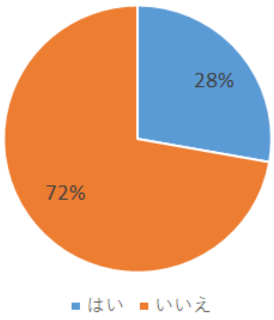
図 13 にアンケート結果を示す．図 13 (a)は，数学で習う微分積分の理解度に関する結果であり，53%の学生が理解できていると回答しているのに対し，図 13 (b)の専門科目で習う微分積分の理解度では，42%の学生が理解できていると回答しており，数学の微分積分の理解より，若干低い．図 13 (c)の数学で習う微分積分と専門教科で使う微分積分が自分の中で関連付けられているかどうかを問う設問では，72%の学生が「いいえ」と回答しており，数学と専門科目の微分積分とは，上手く関連付けられていないことが分かった．高松キャンパスでは，2019 年度から新カリキュラムに移行したことで，低学年次の数学の単位数が大幅に増えており，数学教育の充実化が図られている [6]．これにより，1 年次から微分積分を学習することで，物理学や専門教科への接続が良くなっている．しかし，学生自身の捉え方は，異なっており，数学と専門科目の関連付けが上手くできていないことがわかった．これに関連する図 13 (d)の数学の微分積分で使う変数と専門科目で使う微分積分の変数が異なると戸惑うかとの設問に対しては，78%の学生が「はい」と回答している，多くの学生が，数学と専門科目で使用する変数の違いによって戸惑いを感じていることが明らかになった．数学では，XY 座標系が良く使用されることら，微分積分においても，変数が X，Y であることが多い．そのため，学生達は，その印象を強く持って積分公式等を覚えているものと思われる．先に述べたように，$1/x \cdot dx$ の積分が解答できて，dl/l の積分が解答できないのは，変数の違いによる戸惑いが起因していると思われる．最後に数学と専門科目の微分積分についての意見を自由記述で書いてもらうと，「数学が専門ではどのように使うかを説明して欲しい」，「数学が専門でどの程度重要なのかを示して欲しい」，「数学の計算が実際にどのような分野で使うのかを説明して欲しい」，「何のための計算なのかを示して欲しい」，「変数が違うと簡単な積分でも戸惑う」等の記述があった. 以上のアンケート結果より，数学の授業時に微分積分が専門科目で使う内容であることやその重要性を伝えることに加え，X，Y 以外の具体的な変数を示すことで，数学で習う微分積分と専門科目で取り扱う微分積分との関連付けがスムーズにできるものと考えられる．



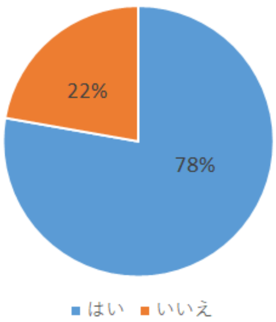
(a)　数学で習う微分積分の理解度は？



(b)　専門科目で習う微分積分の理解度は？



(c) 数学で習う微分積分と専門教科で使う微分積分が自分の中で関連付けられているか？



(d) 数学の微分積分で使う変数と専門科目で使う微分積分の変数が異なると戸惑うか？

図 13　アンケート結果

6.　おわりに

授業教案「ガリレオの斜面実験から微分・積分へ」を，研究紀要に発表してきた．その教案の実践実施を，香川高専高松キャンパスの2年生の希望者対象に，90分×2 日で行った．その実践を踏まえて補足すべき内容及び，学生が微分・積分に慣れ親しむ専門分野の基本的応用例を取り上げたのが本稿である．

今後も，学生が微分・積分に慣れ親しみ理解を深める基本的応用例があれば，専門学科の教員方の協力を得て，掲載を続けたい．

参考文献

（1）鎌田，小島，上代，由良，“(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ― (その１) ガリレオの斜面実験をひも解く－”，香川高等専門学校研究紀要，Vol.11，pp.7-12，2020

（2）鎌田，小島，上代，由良，“(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ― (その２) ガリレオ流の微分・積分を模索する－”，香川高等専門学校研究紀要，Vol.12，pp.7-14，2021

（3）鎌田，小島，由良，“(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ― (その3) 現代風微分・積分へのアプローチ－”，香川高等専門学校研究紀要，Vol.13，pp.1-10，2022

（4）小澤，“電気回路を理解する”，森北出版，2014

（5）武藤，高川，早川，小川，杉江，“わかりやすい電気電子基礎”，コロナ社，pp.35-51，2011

（6）岡野，漆原，”高専の高大接続システムを生かしたカリキュラム改革ー香川高専高松キャンパスの実践例ー”，工学教育，69 巻，2 号，pp.109-113，2021