# ローレンツゲージ場の正準エネルギーと真空期待値

福間一巳 *

# The Canonical Energy and The Vaccum Expected Values of Lorentz Gauge Fields in Poincaré Gauge Theory of Gravity

Kazumi FUKUMA

**Abstract**

The Lagrangian of Poincaré gauge theory is fourth degree in Lorentz gauge fields. It may be possible that some componnents have non-zero vaccum expected values. In the case which Lorentz gauge fields are dominant, we investigate the energy of Lorentz Gauge Fields. It is found that i) the energy in the off-shell case is not bounded below and ii) the vaccum expected values of $0^{\pm}$ components of Lorentz Gauge Fields are zero.

*Keywords:* Poincaré gauge theory, Lorentz gauge field, Canonical Energy, Vaccum expected value

## 1 はじめに

ポアンカレゲージ理論 [1, 2] は，局所対称性として，推進変換，ローレンツ変換を持つゲージ理論であり，局所対称性を保証する場として四脚場とローレンツゲージ場を有し，一般的に定式化されている．そのため，10 個のパラメータを含み，多くの重力理論を含む理論的な枠組みととらえられる．多くの研究者によって，伝播モードの弱場近似での研究 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] が行われ，パラメータにいくつかの制限が付けられたが，多くのパラメータが未定のまま残っている．

ところで，ポアンカレゲージ理論は，ローレンツゲージ場について，2 次と 4 次の項を含むため，ローレンツゲージ場が真空期待値を持つ可能性がある．予備的な研究として，前論文 [10] では，四脚場がローレンツゲージ場に比べ無視できるという仮定のもと，回転対称な成分，$0^{\pm}$ 成分について，真空期待値を持ちうるかどうか，正準エネルギーの下への有界性を調べた．本研究では，すべての成分について，正準エネルギーの下への有界性を調べる．また，下への有界性を仮定しない場合について，真空期待値を持ちうるかどうかも調べる．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では，ポアンカレゲージ理論のラグランジュアン密度，場の方程式などを示し，理論の定式化を行う．第 3 節では，正準エネルギーの一般的な解析を行う．第 4 節では，ローレンツゲージ場の回転に対し不変な真空期待値を調べる．第 5 節で結論をまとめる．

## 2 ポアンカレゲージ理論

ポアンカレゲージ理論の定式化は，前論文 [10] で行っているので，簡単に概要を記す．詳細は文献 4) を参照せよ．本理論は推進変換とローレンツ変換を局所化したゲージ理論であり，四脚場 ${b_k}^{\mu}$, ローレンツゲージ場 ${A^{kl}}_{\mu}$ が導入される．4 脚場と ローレンツゲージ場の 1 階微分について高々 2 次で，空

*香川高等専門学校 詫間キャンパス 情報工学科

間反転に対し不変であり，宇宙項のない，最も一般的な作用積分は

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_G), & (1)\\ \mathcal{L}_M &= bL_0(q^A,\ D_k q^A), & (2)\\ \mathcal{L}_G &= b(\alpha\ {}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm} + \beta\ {}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k \\ &\quad + \gamma\ {}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k + a_1 A_{klmn}A^{klmn} \\ &\quad + a_2 B_{klmn}B^{klmn} + a_3 C_{klmn}C^{klmn} \\ &\quad + a_4 E_{kl}E^{kl} + a_5 G_{kl}G^{kl} + a_6 F^2 \\ &\quad + aF) & (3) \end{aligned}$$

で与えられている [1]．$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$a$ と $a_i$ $(i = 1 \sim 6)$ は任意のパラメータである．物質場 $q^A(x)$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ のラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_M$ は，特殊相対論での物質場のラグランジュアン密度 $L_0 = L_0(q^A,\ q^A{}_{,\mu})$ において物質場の微分 $q^A{}_{,\mu}$ [2] を共変微分

$$D_k q^A = b_k{}^\mu \left( q^A{}_{,\mu} - \frac{i}{2} A^{kl}{}_\mu (S_{kl}q)^A \right) \qquad (4)$$

に置き換えたものである．ここで，$S_{kl}{}^A{}_B$ は物質場 $q^A$ のローレンツ変換の無限小生成演算子である．さらに，作用積分に不変体積要素 $b\,d^4x$ が現れるようにラグランジュアン密度に $b = -\det b_{k\mu}$ を含む．ただし，4 脚場 $b_k{}^\mu$ の双対場 $b_{k\mu}$ は

$$b_{k\mu}b^{l\mu} = \delta_k{}^l,\ b_{k\mu}b^{k\nu} = \delta_\mu{}^\nu \qquad (5)$$

で定義される．ゲージ場のラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_G$ は， 4 脚場の強さ，ローレンツゲージ場の強さ [3]

$$\mathcal{C}_{klm} = 2b_{k\nu}b_{[l}{}^\mu b_{m]}{}^\nu{}_{,\mu} - 2A_{k[l\mu}b_{m]}{}^\mu\ , \qquad (6)$$

$$F_{klmn} = 2b_{[n}{}^\mu b_{m]}{}^\nu (A_{kl\nu,\mu} - A_{pk\mu}A^p{}_{l\nu}) \qquad (7)$$

の規約成分 ${}^T\mathcal{C}_{klm}, {}^V\mathcal{C}_k, {}^A\mathcal{C}_k, A_{klmn}, B_{klmn}, C_{klmn}, E_{kl}, G_{kl}, F$ で与えられている．規約成分の定義は論文 4) を参照せよ．局所推進変換（一般座標変換）と局所ローレンツ変換は

$$\begin{cases} x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\ , \\ q^A(x) \to \\ \qquad q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \frac{i}{2}\omega^{kl}(x)(S_{kl}q(x))^A\ , \\ b_k{}^\mu(x) \to \\ \qquad b_k{}^{\mu\prime}(x') = b_k{}^\mu(x) + \partial_\nu\epsilon^\mu(x) b_k{}^\nu(x) \\ \qquad\qquad + \omega_k{}^l(x) b_l{}^\mu(x)\ , \\ A^{kl}{}_\mu(x) \to \\ \qquad A^{kl}{}_\mu{}'(x') = A^{kl}{}_\mu(x) + \partial_\mu\omega^{kl}(x) \\ \qquad\qquad + \omega^k{}_m(x)A^{ml}{}_\mu(x) \\ \qquad\qquad + \omega^l{}_m(x)A^{km}{}_\mu(x) \\ \qquad\qquad - \partial_\mu\epsilon^\nu(x)A^{kl}{}_\nu(x) \end{cases} \qquad (8)$$

で定義される．ここで, 推進変換のパラメータ $\epsilon^\mu(x)$ とローレンツ変換のパラメータ $\omega^{kl}(x)$ は座標の無限小任意関数である．ただし，$\omega^{kl}(x)$ は添え字 $k, l$ について反対称 $\omega^{ll}(x) = -\omega^{kl}(x)$ である．場の強さ，およびその規約成分は推進変換に対し不変であり，ローレンツ変換に対し共変である．物質場の作用積分 $\int \mathcal{L}_M d^4x$ およびゲージ場の作用積分 $\int \mathcal{L}_G d^4x$ は，これらの変換のもとで不変である．

次節以降では，重力場が無視でき，ローレンツゲージ場は座標に依存しない，つまり

$$b_k{}^\mu(x) = \delta_k{}^\mu,\ A^{kl}{}_\mu(x) = A^{kl}{}_\mu \qquad (9)$$

と仮定する．この仮定から，変換のパラメータが制限

$$\epsilon^\mu(x) = -x^l\omega_l{}^\mu + c^\mu \qquad (10)$$

を受ける．ここで，$\omega_l{}^\mu, c^\mu$ は任意の無限小定数である．このとき，変換は

$$\begin{cases} x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + c^\mu + \omega^\mu{}_l x^l\ , \\ q^A(x) \to \\ \qquad q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \frac{i}{2}\omega^{kl}(S_{kl}q(x))^A\ , \\ b_k{}^\mu(x) = \delta_k{}^\mu \to b_k{}^{\mu\prime}(x') = \delta_k{}^\mu\ , \\ A^{kl}{}_\mu \to \\ \qquad A^{kl}{}_\mu{}' = A^{kl}{}_\mu + \omega^k{}_m A^{ml}{}_\mu + \omega^l{}_m A^{km}{}_\mu \\ \qquad\qquad + \omega_\mu{}^\nu A^{kl}{}_\nu \end{cases} \qquad (11)$$

となる．これは，大域的ローレンツ変換と大域的推進変換の合成，即ち，大域的ポアンカレ変換である．

ラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_G(3)$ のなかの 4 つのローレンツ変換に対する不変量，${}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm}$, ${}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k$, ${}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k$, $F$ は ローレンツゲージ場の 2 次の項を含むので ローレンツゲージ場は質量を持つことが出来る．ローレンツゲージ場の 2 次の項の係数が正で

[1] ラテンの添え字 $k, l, m, \cdots$ は，ミンコフスキー計量 $(\eta_{kl}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ と $(\eta^{kl}) = (\eta_{kl})^{-1}$ を用いて上げ下げをする．この論文では主に論文 4) の記号法を用いる．

[2] $q^A$ の微分 $\partial q^A/\partial x^\mu$ を $\partial_\mu q^A$ または $q^A{}_{,\mu}$ と略記する．

[3] 共変微分 $D_k$ の交換関係は $D_k D_l - D_l D_k = \frac{i}{2}F_{mnkl}S^{mn} + \mathcal{C}^m{}_{kl}D_m$ となる．

あれば，局所ローレンツ変換の自発的対称性の破れが生じる可能性がある．

作用積分 (1) より，$b_{k\mu}$ に対する場の方程式は

$$\begin{aligned}\overset{(M)}{T}{}^{k\mu} &= -2b_l{}^{\mu}b_m{}^{\nu}D_\nu I^{klm} - 2b_l{}^{\mu\,V}\mathcal{C}_m I^{klm} \\ &\quad + b^{p\mu}\mathcal{C}_{plm}I^{klm} - 2b_p{}^{\mu}\mathcal{C}_{lm}{}^{k}I^{plm} \\ &\quad - 2b_p{}^{\mu}F_{lmn}{}^{k}H^{lmnp} + b^{k\mu}\mathcal{L}_G/b \qquad (12)\end{aligned}$$

となり，$A_{kl\mu}$ に対する場の方程式は

$$\begin{aligned}\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu} &= -4b_m{}^{\mu}b_n{}^{\nu}D_\nu H^{klmn} - 2b^{r\mu}\mathcal{C}_{rnm}H^{klmn} \\ &\quad - 4b_m{}^{\mu\ V}\mathcal{C}_n H^{klmn} - 4b_m{}^{\mu}I^{[kl]m} \qquad (13)\end{aligned}$$

となる．ただし，$H^{klmn}$，$I^{klm}$，$\overset{(M)}{T}{}^{k\mu}$，$\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu}$，$D_\mu I^{klm}$，$D_\mu H^{klmn}$ は

$$\begin{aligned}H^{klmn} &= 12a_1A^{klmn} + 8a_2B^{[kl][mn]} \\ &\quad + 4a_3C^{klmn} \\ &\quad + 2a_4(E^{k[m}\eta^{n]l} - E^{l[m}\eta^{n]k}) \\ &\quad + 2a_5(G^{k[m}\eta^{n]l} - G^{l[m}\eta^{n]k}) \\ &\quad + 2a_6F\eta^{k[m}\eta^{n]l} \\ &\quad + a\eta^{k[m}\eta^{n]l}\ , \qquad (14) \\ I^{klm} &= 2\alpha\ {}^{T}\mathcal{C}^{k[lm]} + 2\beta\eta^{k[l\ V}\mathcal{C}^{m]} \\ &\quad + \frac{1}{3}\gamma\epsilon^{rklm\ A}\mathcal{C}_r\ , \qquad (15) \\ \overset{(M)}{T}{}^{k\mu} &= b_l{}^{\mu}\frac{\partial L_M}{\partial D_l q^A}(D_k q)^A - b^{k\mu}L_M, \qquad (16) \\ \overset{(M)}{S}{}^{kl\mu} &= \frac{\partial L_M}{\partial q^A{}_{,\mu}}i(S^{kl}q)^A\ , \qquad (17) \\ D_\mu I^{klm} &= I^{klm}{}_{,\mu} - A^{k}{}_{p\mu}I^{plm} \\ &\quad - A^{l}{}_{p\mu}I^{kpm} - A^{m}{}_{p\mu}I^{klp}\ , \qquad (18) \\ D_\mu H^{klmn} &= H^{klmn}{}_{,\mu} - A^{k}{}_{p\mu}H^{plmn} \\ &\quad - A^{l}{}_{p\mu}H^{kpmn} - A^{m}{}_{p\mu}H^{klpn} \\ &\quad - A^{n}{}_{p\mu}H^{klmp} \qquad (19)\end{aligned}$$

と定義されている．

また，ゲージ場の正準エネルギー $H = \int \mathcal{H}d^3x$ を与える正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= 2bI^{klm}b_l{}^{\alpha}b_m{}^{0}b_{k\alpha,0} \\ &\quad + 2bH^{klmn}b_m{}^{\alpha}b_n{}^{0}A_{kl\alpha,0} - \mathcal{L}_G \qquad (20)\end{aligned}$$

である．

## 3　正準エネルギー

本節では，座標によらないローレンツゲージ場（真空期待値の候補）の正準エネルギーを一般的に調べる．まず，ゲージ変換の自由度を固定する．ゲージ条件として

$$A_{kl0} = 0 \qquad (21)$$

を課す．これにより，ゲージ変換のパラメータ $\omega_{kl}$ のすべてが一意的に定まる．

簡単な表記にするため，以下のゲージポテンシャルの名前の付け替えを行う．

$$\begin{aligned}&\{\phi_i, i = 1 \sim 18\} = \{A_{011}, A_{012}, A_{013}, \\ &A_{021}, A_{022}, A_{023}, A_{031}, A_{032}, A_{033}, \\ &A_{121}, A_{122}, A_{123}, A_{131}, A_{132}, A_{133}, \\ &A_{231}, A_{232}, A_{233}\} \qquad (22)\end{aligned}$$

正準エネルギー密度 $\mathcal{H}(20)$ は，2 次形式ではなく，18 変数の 4 次の多項式であるため，下に有界であるための条件を一般的に調べることは困難である．そのため，逐次零ではない成分を増やしながら条件を絞って行くという戦略を採用する．

i) 1 成分 $\phi_i$ のみが零でない場合：正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ は $\phi_i$ について 2 次であり，

$$-\mathcal{H} = \mathcal{L}_G = C_i\phi_i{}^2 \qquad (23)$$

と表される．ここで，係数は

$$C_i = \begin{cases} \alpha+\beta, & i = 10, 11, 13, 15, 17, 18 \\ -\alpha-\beta, & i = 1, 5, 9 \\ \alpha - \frac{4}{9}\gamma, & i = 12, 14, 16 \\ -\alpha + \frac{4}{9}\gamma, & i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 16 \end{cases} \qquad (24)$$

で与えられる．よって，正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ が下に有界であるためには

$$\alpha + \beta = 0,\ \alpha - \frac{4}{9}\gamma = 0 \qquad (25)$$

が必要である．

ii) 2 成分 $\phi_i, \phi_j$ のみが零でない場合：最高次は 4 次であるが，最高次の項は $D_{ij}\phi_i{}^2\phi_j{}^2$ の形をしている．正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}-\mathcal{H} = \mathcal{L}_G &= D_{ij}\phi_i{}^2\phi_j{}^2 + C_i\phi_i{}^2 \\ &\quad + C_j\phi_j{}^2 + C_{ij}\phi_i\phi_j \qquad (26)\end{aligned}$$

で与えられる．係数 $D_{ij}$ は

$$D_{ij} = \begin{cases} -2(6a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5), & (i,j) \in S_A \\ 2(6a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5), & (i,j) \in S_B \\ -8(3a_1 + 2a_2 + a_3), & (i,j) \in S_C \\ 4(4a_2 + a_5 + a_6), & (i,j) \in S_D \end{cases} \qquad (27)$$

である．ただし，$S_A, S_B, S_C, S_D$ は，互いに共通部分を持たない，添え字の対の集合である．次式はその一部を示したものである．

$$\begin{aligned} S_A &= \{(1,11),(1,15),(2,10),...\} \\ S_B &= \{(1,6),(1,8),(2,6),...\} \\ S_C &= \{(1,12),(1,14),(2,13),...\} \\ S_D &= \{(1,5),(1,9),(2,4),...\} \end{aligned} \tag{28}$$

4 次の項の解析より，正準エネルギー密度が下に有界であるためには

$$\begin{aligned} &6a_2+2a_3+a_4+a_5=0, \\ &3a_1+2a_2+a_3 \geq 0,\ 4a_2+a_5+a_6 \leq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

が必要である．

iii) 3 成分 $\phi_i, \phi_j, \phi_k$ のみが零でない場合，最高次は 4 次であり，$\mathcal{L}_G$ の最高次の項は次のようにまとめられる．

$$\begin{aligned} &D_{ij}{\phi_i}^2{\phi_j}^2 + D_{jk}{\phi_j}^2{\phi_k}^2 + D_{ki}{\phi_k}^2{\phi_i}^2 \\ &+E_{ijk}{\phi_i}^2\phi_j\phi_k + E_{jki}{\phi_j}^2\phi_k\phi_i \\ &\quad +E_{kij}{\phi_k}^2\phi_i\phi_j \end{aligned} \tag{30}$$

これより, 正準エネルギー密度が下に有界であるための必要条件として

$$D_{ab} \leq 0,\ {E_{abc}}^2 - 4D_{ab}D_{ac} \leq 0 \tag{31}$$

を得る．ここで，$a, b, c$ は $i, j, k$ の任意の組み合わせである．

いくつか，解析例を示す．

$(i,j,k)=(1,6,8)$ のとき，$\mathcal{L}_G$ の最高次の項は

$$\begin{aligned} &2(6a_2+2a_3+a_4+a_5)({\phi_1}^2{\phi_6}^2+{\phi_1}^2{\phi_8}^2) \\ &+4(4a_2+a_5+a_6){\phi_8}^2{\phi_6}^2 \\ &+2(-6a_2-2a_3+a_4+a_5)({\phi_1}^2\phi_6\phi_8) \end{aligned} \tag{32}$$

であり，ii) の結果 $6a_2+2a_3+a_4+a_5=0$ を用いると

$$\begin{aligned} &4(4a_2+a_5+a_6){\phi_{15}}^2{\phi_1}^2 \\ &\quad +4(a_4+a_5){\phi_{18}}^2\phi_1\phi_{15} \end{aligned} \tag{33}$$

となる．よって，条件

$$a_4+a_5=0,\quad 4a_2+a_5+a_6 \leq 0 \tag{34}$$

を得る．

$(i,j,k)=(1,5,9)$ のとき，$\mathcal{L}_G$ の最高次の項は

$$\begin{aligned} &4(4a_2+a_5+a_6)({\phi_1}^2{\phi_5}^2+{\phi_5}^2\phi_9^2 \\ &+{\phi_9}^2{\phi_1}^2) - 8(2a_2-a_6)({\phi_1}^2\phi_5\phi_9 \\ &+{\phi_5}^2\phi_9\phi_1+{\phi_9}^2\phi_1\phi_5) \end{aligned} \tag{35}$$

であり，これより

$$\begin{aligned} &4a_2+a_5+a_6 \leq 0,\ 2a_2+a_5 \geq 0, \\ &(6a_2+a_5)(2a_2+a_5+2a_6) \geq 0 \end{aligned} \tag{36}$$

を得る．

$(i,j,k)=(1,5,12)$ のとき，$\mathcal{L}_G$ の最高次の項は

$$\begin{aligned} &-8(3a_1+2a_2+a_3)({\phi_5}^2{\phi_{12}}^2+{\phi_{12}}^2\phi_1^2) \\ &+4(4a_2+a_5+a_6){\phi_1}^2{\phi_5}^2 \\ &-16(3a_1-a_2)({\phi_{12}}^2\phi_1\phi_5) \end{aligned} \tag{37}$$

であり，これより

$$\begin{aligned} &3a_1+2a_2+a_3 \geq 0,\ 4a_2+a_5+a_6 \leq 0, \\ &(3a_2+a_3)(6a_1+a_2+a_3) \geq 0 \end{aligned} \tag{38}$$

を得る．

iv) 4 成分 $\phi_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l$ のみが零でない場合: i),ii),iii) の結果とローレンツゲージ場の伝播成分 $0^{\pm}$ が正エネルギーを持つ条件 [4] $9a_1+a_3<0, a_5+3a_6>0$ を組み合わせ

$$\begin{aligned} &9a_1+a_3=0, a_5+3a_6=0, a_4+a_5=0, \\ &3a_2+a_3=0, \alpha+\beta=0, \alpha-\frac{4}{9}\gamma=0 \end{aligned} \tag{39}$$

を得る．これらの条件を仮定する．

$\phi_1, \phi_2, \phi_6, \phi_7$ のみが零でないとき

$$-\mathcal{H} = \mathcal{L}_G = -8(6a_2-a_4)\phi_1\phi_2\phi_6\phi_7 \tag{40}$$

である．正準エネルギー密度が下に有界となるためには $6a_2-a_4=0$ でなければならない．6 つのパラメータ $a_i(i=1\sim6)$ のうち 5 つが独立であり [9]，これに対し 5 つの条件を課したため，これらの条件は $a_i=0(i=1\sim6)$ と等価である．ローレンツゲージ場のラグランジュアンはある関数の微分で表される．つまり，作用が表面項として表されることになる [9]．これにより，エネルギー密度自体が下に有界であることを要請した場合，ローレンツゲージ場は代数的に 4 脚場によって表され，独立な成分として伝播することはない．

なお，この要請は強すぎる可能性がある．実際，他の非可換ゲージ理論はこの要請を満たさない．時

空の不定計量のため，非可換ゲージ理論の正準エネルギー密度は下に有界ではない．非可換ゲージポテンシャルの真空期待値は零またはピュアゲージであるが，これは正準エネルギー密度のサドルポイントであり，その時の正準エネルギー密度は零である．

今までは，正準エネルギー密度自体の下への有界性を議論してきた．これからは，その条件を緩め，運動方程式の解に関しての正準エネルギー密度を議論する．

## 4　ローレンツゲージ場の $0^\pm$ 成分の真空期待値

前論文 [10] では正準エネルギー密度が下に有界であるという要請を仮定し，ローレンツゲージ場の真空期待値の存在を調べたが，本論文では，それを仮定しない．

四脚場の重力場成分 $c_k{}^\mu = c_k{}^\mu - \delta_k^\mu$ は無視でき，ローレンツゲージ場は $0^\pm$ 成分のみを持つと仮定する．つまり，場は

$$
\begin{aligned}
q^A &= 0 && (41)\\
b_k{}^\mu &= \delta_k^\mu && (42)\\
A_{klm}(x) &= (\delta_k^0\eta_{lm} - \delta_l^0\eta_{km})\phi(x) \\
&\quad +\epsilon_{0klm}\psi(x) && (43)
\end{aligned}
$$

で与えられるとする．ここで，$\phi(x), \psi(x)$ は，それぞれ，ローレンツゲージ場の $0^+, 0^-$ 成分を表し，座標 $x^\mu$ の関数である．この配位は，空間の回転（大域的ポアンカレー変換 (11) で $\epsilon^\mu = 0, \omega_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ とした変換）のもとで不変である．

このとき，ゲージ場のラグランジュアン (3) は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = &\; 12(a_5+3a_6)\phi_{,0}{}^2 - 24(9a_1+a_3)\psi_{,0}{}^2 \\
& -8(a_4+a_5)\phi_{,i}\phi_{,i} + 8(2a_3+a_4)\psi_{,i}\psi_{,i} \\
& -24(a_5-3a_6)\phi_{,0}(\phi^2-\psi^2) + 6a\phi_{,0} \\
& -96(9a_1-a_3)\psi_{,0}\phi\psi \\
& +12(a_5+3a_6)\phi^4 + 12(a_5+3a_6)\psi^4 \\
& -24(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\phi^2\psi^2 \\
& -9\left(\beta-\frac{2}{3}a\right)\phi^2 - 4\left(\gamma+\frac{3}{2}a\right)\psi^2 \qquad (44)
\end{aligned}
$$

となる．これより，正準エネルギー密度 $\mathcal{H}(20)$ は，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = &\; 12(a_5+3a_6)\phi_{,0}{}^2 - 24(9a_1+a_3)\psi_{,0}{}^2 \\
& +8(a_4+a_5)(\phi_{,1}{}^2+\phi_{,2}{}^2+\phi_{,3}{}^2) \\
& -8(2a_3+a_4)(\psi_{,1}{}^2+\psi_{,2}{}^2+\psi_{,3}{}^2) \\
& -12(a_5+3a_6)\phi^4 - 12(a_5+3a_6)\psi^4 \\
& +24(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\phi^2\psi^2 \\
& +9\left(\beta-\frac{2}{3}a\right)\phi^2 + 4\left(\gamma+\frac{3}{2}a\right)\psi^2 \qquad (45)
\end{aligned}
$$

となる．

ローレンツゲージ場の $0^+, 0^-$ 成分 $\phi(x), \psi(x)$ が座標によらないと仮定すると場の方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= \phi\Big\{48(a_5+3a_6)\phi^2 \\
&\quad - 48(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\psi^2 \\
&\quad - 18\left(\beta-\frac{2}{3}a\right)\Big\}, && (46)\\
0 &= \psi\Big\{48(a_5+3a_6)\psi^2 \\
&\quad - 48(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\phi^2 \\
&\quad - 8\left(\gamma+\frac{3}{2}a\right)\Big\} && (47)
\end{aligned}
$$

となる．当然ながら，場の方程式はエネルギー密度 $\mathcal{H}$ の停留値を与える条件となっている．正準エネルギー密度 $\mathcal{H}(45)$ より，ローレンツゲージの $0^+, 0^-$ 成分 $\phi, \psi$ が零ではない真空期待値をもつための条件は

$$
\beta - \frac{2}{3}a < 0 \text{ または } \gamma + \frac{3}{2}a < 0 \qquad (48)
$$

である．これを満たすすべての場合，i)$\beta - \frac{2}{3}a < 0, \gamma + \frac{3}{2}a \geq 0$, ii)$\beta - \frac{2}{3}a \geq 0, \gamma + \frac{3}{2}a < 0$, iii)$\beta - \frac{2}{3}a < 0, \gamma + \frac{3}{2}a < 0$ を調べる．

i) $\beta - \frac{2}{3}a < 0, \gamma + \frac{3}{2}a \geq 0$ のとき，$a_5 + 3a_6 < 0$ ならば，自明な解以外に，解

$$
\phi^2 = \frac{3(\beta - \frac{2}{3}a)}{8(a_5+3a_6)},\ \psi = 0 \qquad (49)
$$

が存在することになるが，正準エネルギー密度 (45) の運動項が正となるための条件 $a_5 + 3a_6 > 0$ に反するため，不適である．

ii) $\beta - \frac{2}{3}a \geq 0, \gamma + \frac{3}{2}a < 0$ のとき，$a_5 + 3a_6 < 0$ ならば，自明な解以外に，解

$$
\psi^2 = \frac{(\gamma + \frac{3}{2}a)}{6(a_5+3a_6)},\ \phi = 0 \qquad (50)
$$

が存在することになるが，正準エネルギー密度 (45) の運動項が正となるための条件 $a_5 + 3a_6 > 0$ に反するため，不適である．

iii) $\beta - \frac{2}{3}a < 0, \gamma + \frac{3}{2}a < 0$ のとき，解

$$
\begin{aligned}
\phi^2 &= \frac{1}{D}\Big(9(a_5+3a_6)\Big(\beta-\frac{2}{3}a\Big) \\
&\quad +4(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\Big(\gamma+\frac{3}{2}a\Big)\Big), && (51)\\
\psi^2 &= \frac{1}{D}\Big(9(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\Big(\beta-\frac{2}{3}a\Big) \\
&\quad +4(a_5+3a_6)\Big(\gamma+\frac{3}{2}a\Big)\Big), && (52)\\
D &= -192(9a_1+a_3) \\
&\quad (18a_1+2a_3+a_5+3a_6) && (53)
\end{aligned}
$$

が存在する．この場合は，運動項の正値性からの条件 $a_5+3a_6>0, 9a_1+a_3<0$ は，$D$ の符号を決めないので，i)，ii) と同様には, 不適を示すことはできない．しかし，$D^2\phi^2>0,\ D^2\psi^2>0$ から

$$0<D(18a_1+2a_3+a_5+3a_6) \tag{54}$$

を用い，因子 $(9a_1+a_3)$ を消去すると，それぞれ

$$\begin{aligned} 0&<D(a_5+3a_6)\left(9\Big(\beta-\frac{2}{3}a\Big)-4\Big(\gamma+\frac{3}{2}a\Big)\right)\\ 0&<D(a_5+3a_6)\left(-9\Big(\beta-\frac{2}{3}a\Big)+4\Big(\gamma+\frac{3}{2}a\Big)\right)\end{aligned} \tag{55}$$

を得る。よって，不適である．

以上の i)，ii)，iii) の結果より，$0^{\pm}$ 成分に関しては，真空期待値は零である．

## 5 おわりに

ローレンツゲージ場の正準エネルギー密度を，場が座標によらない場合について調べ，有意なゲージ場が存在するとき，下に有界ではないことを示した．正準エネルギー密度が下に有界ではない状況は他の非可換ゲージ場と同様である．よりゆるやかな要請，場の方程式の解に対する正準エネルギー密度の下への有界性を要請すべきであろう．真空の安定性の議論も含め，この正準エネルギー密度の下への有界性は今後の課題である．

ローレンツゲージ場の零でない真空期待値の可能性を，前論文での要請，正準エネルギー密度が下に有界であることを仮定しない場合に，ローレンツゲージ場の $0^{\pm}$ 成分に関し調べた．正準エネルギーの運動項が正定値であるという仮定のもと，この成分の真空期待値が零であることを示した．他の成分に関して，真空期待値を調べることも今後の課題である．

### 参考文献


1) K. Hayashi, ”Gauge Theories of Masive and Massless Tensor Fields”, Prog. Theor. Phys. **39** (1968), 494.

2) F. W. Hehl, in *Proc. of the 6th Course of the School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity, Erice, Italy*, 1979, ed. P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York 1980).

3) K. Hayashi and T. Shirafuji, ”Gravity from Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. IV —Mass and Energy of Particle Spectrum—”, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 2222.

4) S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, ”Linear Approximation for the Lorentz Gauge Field ”, Prog. Theor. Phys. **66** (1981), 481.

5) E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, ”New Ghost Free Gravity Lagrangians with Propagating Torsion”, Phys. Rev. **D21** (1980), 3269.

6) K. Fukuma, S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, ”Massless Lorentz Gauge Field Consistent With Einstein’s Gravitation Theory —The Case $\alpha+3a/2=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ —”, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), 874.

7) S. Nakariki, ”A Spinor Approach to Poincare Gauge Theory —In a Case of Massless Lorenz Gauge Field— ”, Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 523.

8) E. Sezgin, ”Class of Ghost Free Gravity Lagrangians With Massive or Massless Propagating Torsion”, Phys. Rev. **D24** (1981), 1677.

9) K. Fukuma, ”Massless modes of Lorentz gauge fields in Poincare gauge theory of gravity — The case with $\alpha+2a/3=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ —”, Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 191.

10) 福間一巳, ”ローレンツゲージ場の $0^{\pm}$ 成分”, 香川高等専門学校研究紀要 第５号 (2014), 153.