

スライディングモード制御を用いた台車型直列二重倒立振子の部分的振り上げ制御*

逸見 知弘[†], Mingcong Deng[‡], 井上 昭[‡]

A partial swing-up control of a cart-type serial double inverted pendulum via sliding-mode control

Tomohiro Henmi, Mingcong Deng[‡], Akira Inoue[‡]

Abstract In this paper, the partial swing-up controller for the cart-type serial double inverted pendulum that swings up the second pendulum with stabilizing the first pendulum and controlling the cart position is proposed. The proposed method consists of two controllers; a sliding-mode controller which has a good robustness property for disturbances in the input, used for the stabilizing control of the first pendulum and for the positioning control of the cart; and an energy based controller used for the swing-up control of the second pendulum. Numerical simulations and experimental results are given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words Serial double inverted pendulum, Sliding-mode control, Energy control

1 はじめに

非線形性、劣駆動性といった特徴を有する倒立振子システムは、制御器設計手法の検証用として多くの研究者により研究されている [1, 2, 3]. その中でも、図 1 で示されるように、振子が直列につながった直列二重倒立振子の制御問題は、単一の振子に比べ非線形性、劣駆動性が強いと困難な課題である。そこで本稿では、台車型の直列二重倒立振子に対して、両振子が真下に下がった状態、または台車に付いた第一振子は倒立状態で、その先にある第二振子は真下に下がった状態から、第一振子はそのままの状態を保ちながら第二振子のみを振り上げる部分的振り上げ制御問題を考える。

直列二重倒立振子の制御問題を扱った代表的なものとして文献 [2] が挙げられる。ここでは直列二重倒立振子を用いた様々な問題が扱われており、本稿と同様の制御問題も紹介されている。しかしながら、従来法 [2] が台車の位置制御の考慮が必要ない回転型の直列二重倒立振子システムが制御対象であるのに加え、第一振子の安定化は行われず、第二振子の振り上げのみに着目した制御則であり、第一振子が大きく揺れたときは別の安定化制御器に切り替えて安定化し、再び振り上げ制御を行うものであった。

そこで本稿では、第二振子の振り上げ制御だけでなく第一振子の安定化制御と台車の位置制御も考慮した手法として、第一振子の安定化制御と、台車の位置制御を行うスライディングモード制御入力 [4, 5] に第二振子の振り上げを行うエネルギー制御法による制御入力を加える

手法を提案する。本手法は 2 つの制御則をお互いに外乱にみなし、それぞれロバスト性を利用することで 2 つの制御を達成し、また、振り上げ制御ではジョイント位置を仮想的な台車と見なす手法である。これは、文献 [3] 内の直列二重倒立振子の振り上げ制御における、振子の状態が '第一振子：下-第二振子：下' から '下-上' の制御と同様の手法であるが、本稿では、文献 [3] に加え、振子の状態が、'上-下' から '上-上' の制御にも適用し、同じ制御手法が 2 つの目的に適用可能であることを実験で検証した結果である。

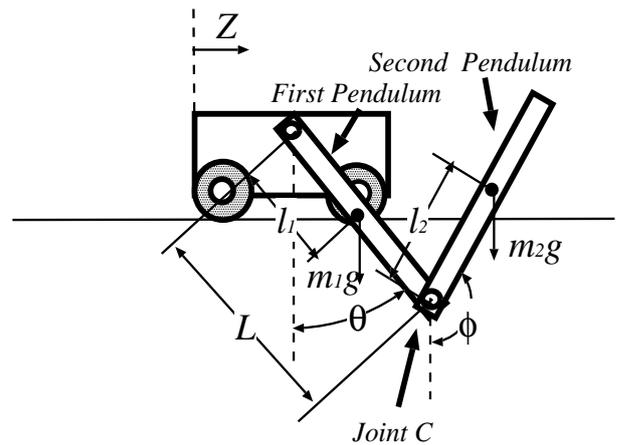


図 1: 直列二重倒立振子の概略図

*原稿受理: 11 月 20 日

[†]高松高専制御情報工学科

[‡]岡山大学大学院 自然科学研究科

2 直列二重倒立振子の運動方程式

図1で示される、台車型の直列二重倒立振子の運動方程式は、(1),(2)式で表される。

$$A_{11}\ddot{\theta} + A_{12}\ddot{\phi} + f_{11} + f_{12} \cdot \ddot{z} = 0 \quad (1)$$

$$A_{21}\ddot{\theta} + A_{22}\ddot{\phi} + f_{21} + f_{22} \cdot \ddot{z} = 0 \quad (2)$$

ここで、各係数は以下で表される。

$$\begin{aligned} A_{11} &= I_1 + J_{n_1} + m_2 L^2 + n_2 L^2, & A_{22} &= I_2 + J_{n_2} \\ A_{12} &= A_{21} = M_1 \cos(\theta - \phi) \\ f_{11} &= M_1 \dot{\phi}^2 \sin(\theta - \phi) + (c_1 + c_2)\dot{\theta} - c_2 \dot{\phi} + M_2 g \sin \theta \\ f_{12} &= M_2 \cos \theta, & f_{22} &= M_3 \cos \phi \\ f_{21} &= -M_1 \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi) - c_2(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + M_3 g \sin \phi \\ M_1 &= m_2 l_2 L, & M_2 &= m_1 l_1 + m_2 L + n_2 L, & M_3 &= m_2 l_2 \end{aligned}$$

また、各変数およびパラメータは、 z : 台車の変位、 θ : 第一振子の鉛直下向からの角度、 ϕ : 第二振子の鉛直下向からの角度、 m_i : 各振子の質量、 n_2 : 両振子間のジョイント質量、 l_i : 各振子の軸-重心間距離、 J_{n_i} : 各振子のジョイントの重心回りの慣性モーメント、 I_i : 各振子の回転軸回りの慣性モーメント、 c_i : 各振子の回転摩擦係数、 L : 第一振子の全長、 g : 重力加速度とした。さらに制御入力 u は台車への印加加速度とし、 $u = \ddot{z}$ とした。

3 第一振子の安定化制御と台車の位置制御

まず、第一振子を上または下の平衡点で安定化させ、台車の位置制御を行う制御則を求める。本稿では、安定化および台車の位置制御に、入力外乱に対してロバスト性を持つスライディングモード制御を採用する。(1)式の運動方程式において、第二振子の角度 ϕ に関する項を無視し、第一振子の角度 θ に関する項のみを考えると、

$$A_{11}\ddot{\theta} + (c_1 + c_2)\dot{\theta} + M_2 g \sin \theta + M_2 \cos \theta \ddot{z} = 0 \quad (3)$$

が得られる。今、第一振子を安定化する制御入力を $\ddot{z} = u_1$ とおき、システムの状態変数を第一振子を安定平衡点で安定化(制振制御)を行うときは、 $x = [\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}]^T = 0$ を、第一振子を不安定平衡点すなわち倒立状態で安定化する場合の状態変数には、 $x = [\theta - \pi, z, \dot{\theta}, \dot{z}]^T = 0$ をそれぞれ用いて、(3)式を平衡点近傍で線形近似を行うと、平衡点近傍におけるシステムの状態方程式は以下のように表すことができる。

$$\dot{x} = Ax + Bu_1 \quad (4)$$

ここで、 A, B は、線形近似を行った際の状態方程式の係数ベクトルである。

(4)式のシステムに対し、スライディングモード制御を用いた安定化制御器を構成すると以下のようなになる[4]。

$$u_1 = -(S_1 B)^{-1}(S_1 Ax + R_1 \operatorname{sgn}(\sigma_1) + K_1 \sigma_1) \quad (5)$$

$$\sigma_1 = S_1 x \quad (6)$$

このとき $R_1 > 0, K_1 > 0$ である。また S_1 は以下の Riccati 方程式の正定解 P_1 より求めることができる。

$$\begin{aligned} P_1(A + \epsilon_1 I) + (A + \epsilon_1 I)^T P_1 - P_1 B B^T P_1 + Q_1 &= 0 \\ S_1 &= B^T P_1 \end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon_1 > 0$ は美多ら [4] により考案された手法において、スライディングモード超平面 (σ_1) 上での閉ループ極の実部を $-\epsilon_1$ 以下に指定し、不確かさに対するロバスト性を決める設計パラメータである。(5)式で表される制御入力 u_1 が、第一振子の安定化および台車の位置制御を行うスライディングモード制御入力である。

4 第二振子の振り上げ制御

続いて、第二振子の振り上げ制御則を考える。今、第二振子は第一振子の先に接続されており、直接第二振子を制御することができない。そこで、われわれは第一振子と第二振子のジョイント部分を仮想台車とみなし、その加速度を第二振子への仮の制御入力 u_2 とみなし制御則を考える。すなわち、ジョイントを台車に、第二振子を単振子に置き換えて制御する。

まず、両振子間のジョイント部分を仮の台車とみなし、その加速度 \ddot{z}_2 を求めると

$$\ddot{z}_2 = \ddot{z} + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (7)$$

となる。今、第二振子を振り上げる台車への加速度入力を u_2 、仮想台車への加速度入力を $u_{z_2} := \ddot{z}_2$ とし、(1),(2)式を用いて(7)式を変換すると、以下のような、 u_2 と u_{z_2} の関係式を得ることができる。

$$u_2 = \frac{(u_{z_2} + L\dot{\theta}^2 \sin \theta)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + (A_{12}f_{22} - A_{22}f_{12})L \cos \theta} - \frac{(A_{12}f_{21} - A_{22}f_{11})L \cos \theta}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + (A_{12}f_{22} - A_{22}f_{12})L \cos \theta} \quad (8)$$

(8)式の関係式を用いることで、システムは仮想台車と第二振子のみの運動方程式で表すことができる。今、摩擦項の影響を無視したとき、仮想入力 u_{z_2} を用いた第二振子のみの運動方程式は次式となる。

$$\ddot{\phi} = \frac{m_2 l_2}{I_2} (-g \sin \phi + u_{z_2} \cos \phi) \quad (9)$$

本稿では、(9)式で表される第二振子の振り上げ制御を行う手法として、エネルギー制御法 [1] を採用する。

今、新たな関数 $V = \frac{1}{2} E^2$ を採用する。ここで、 $E = \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 - m_2 l_2 g (\cos \phi + 1)$ はエネルギー準位を倒立点が 0 となるようにした第二振子のエネルギーである。今、振り上げ制御入力を

$$u_{z_2} = -u_{a1} \operatorname{sgn}(E \dot{\phi} \cos \phi) \quad (u_{a1} > 0) \quad (10)$$

と設計すると、 V の時間微分 \dot{V} は

$$\dot{V} = m_2 l_2 (E \dot{\phi} \cos \phi) (-u_{a1} \operatorname{sgn}(E \dot{\phi} \cos \phi)) \leq 0 \quad (11)$$

と非正となる. 今, 簡単な解析より, 恒等的に $\dot{V} = 0$ すなわち $\dot{V} \equiv 0$ となるのは, $E = 0$ のときだけなので, 関数 V およびエネルギー E は $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} E = 0$ に収束させることができ, 第二振子を振り上げることができる.

ここで, 第一振子の安定化制御への影響を小さくするため, 振り子1スイング中のエネルギー増加の効率が良いときにのみ入力を与えることとする. 今, 振り子のエネルギーが一定のとき, (11)式より, 振り子が鉛直下向きを通り過ぎるとき, 角速度 $|\dot{\phi}|$ が最大で $\cos \phi = 1$ となり \dot{V} の値が最大となる. したがって, エネルギーの増加効率ももっとも良いといえる. そこで以下のように第二振子が鉛直下方向の前後, $\mu[\text{rad}]$ の間だけ振り上げ入力を与えることとした.

$$u_{z2} = \begin{cases} -u_{a1} \text{sgn}(E\dot{\phi} \cos \phi) & (\cos \phi \geq \cos \mu) \\ 0 & (\cos \phi < \cos \mu) \end{cases} \quad (12)$$

ここで, 摩擦係数 c_1, c_2 は小さく, ジョイント部の摩擦係数は無視できるとすると, 入力を $u_{z2} = 0$ にしても第二振子のエネルギーは変化せず振り子は一定のエネルギーで振動する. したがって, 有限時間後には再び, $u_{z2} = -u_{a1}$ となる.

ここで仮想入力と台車への加速度入力の関係式 (8) 式を用いると, u_{z2} から第二振子を振り上げる制御入力 u_2 を求めることができる. したがって, 第一振子を安定化しながら第二振子を振り上げる制御入力は以下の式となる.

$$u = u_1 + u_2 \quad (13)$$

本稿では, 第一振子の安定化入力 u_1 と第二振子の振り上げ入力 u_2 をお互いに外乱とみなす. スライディングモード制御は, 野波ら [5] によれば, $(S_1 B_1)^{-1} R_1 \geq d$ (d : 入力外乱) を満たすとき, 入力外乱 d に対するロバスト性が保証されている. この条件は十分条件であり, d が条件を満たさなくても制御系はロバスト性を持つ場合がある. また, エネルギー制御法では, 入力ゲイン u_{a1} を調整することで, 外乱による散逸エネルギーより入力による注入エネルギーを大きくすることで外乱を考慮することが出来る [2]. したがって, 上記の条件を大きく超えないように振り上げ制御パラメータ u_{a1} および安定化パラメータ ϵ_1, R_1 を調整することで, 2つの制御目的は達成可能である.

5 シミュレーションおよび実験による検証

本手法の有効性を検証するため, シミュレーションによる従来法と提案法の比較と実験による検証を行った. 制振制御+振り上げ制御の結果を図 2, 図 4 に, 安定化制御+振り上げ制御の結果を図 3, 図 5 に示す. ここで, 従来法 (破線) [2] は第二振子の振り上げ制御のみを行ったものとし, 提案法 (実線) は振り上げ制御だけでなくスライディングモードによる第一振子の安定化制御器も付加したものを示す. グラフは共に上から, 第一振子の角度, 第二振子の角度, 台車の位置の順に示され

ている. また, 直列二重倒立振子モデルのパラメータは $m_1 : 0.18[\text{kg}], m_2 : 0.10[\text{kg}], n_2 : 0.05[\text{kg}], l_1 : 0.25[\text{m}], l_2 : 0.115[\text{m}], J_1 : 0.0037[\text{kgm}^2], J_2 : 0.00044[\text{kgm}^2], J_{n1} : 2.8 \times 10^{-5}[\text{kgm}^2], J_{n2} : 2.0 \times 10^{-6}[\text{kgm}^2], I_1 : 0.02[\text{kgm}^2], I_2 : 0.0018[\text{kgm}^2], c_1 : 0.0001, c_2 : 0.002, L : 0.38[\text{m}], g : 9.8[\text{m/s}^2]$ とした. さらに制御パラメータは, 表 1 に示すものを用いた. この値は, 試行錯誤的に, 2つの制御則 (振り上げと安定化) が達成する最適な値を選んだ. また同時に台車の移動距離も制御則の性質上, 一意的に決定しないためパラメータは試行錯誤的に選んだ. またシミュレーションにおける初期状態は, 図 2: $(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) = (0, 0.1, 0, 0.01)$, 図 3: $(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) = (\pi - 0.01, 0.01, 0.1, -0.5)$ とした. まず, 図 2 を見ると, 従来法の振り上げ制御のみでは, 第二振子は振り上がるがその前に第一振子が振り上がり回転しているのに対し, 提案法では第一振子の安定化を行うスライディングモード制御により第一振子が真下で安定化され, 第二振子もエネルギー制御法により振り上がっているのが判る. また, 従来法では台車位置が発散しているのに対し, 提案法では台車が大きく動いていないのが判る. つづいて, 図 3 でも図 2 の制御同様, 従来法では第一振子が安定化できず倒れて回転しているのに対し, 提案法では第一振子は倒れることなく第二振子を振り上げることに成功し, また同時に台車の位置制御が行われているのが判る. また, 実際に実験を行った結果図 4, 図 5 を見てみると, シミュレーションと同様の挙動を示し, ともに実験に成功している. これらより, 目的の違う二つの制御則を加えても, ロバスト性をもつ制御則を用いることにより, お互いに外乱とみなすことができ, お互いの干渉を抑えて, 二つの制御が達成されることが証明できた.

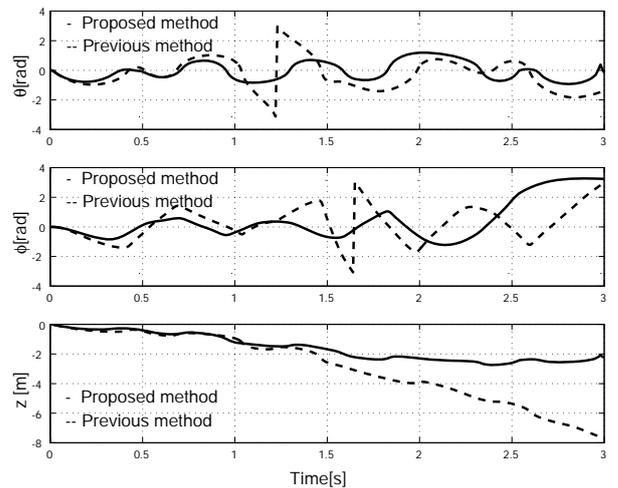


図 2: 第一振子の制振制御+第二振子の振り上げ

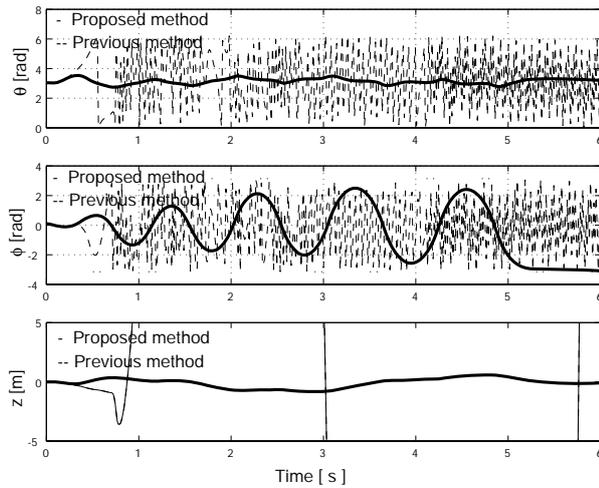


図 3: 第一振子を倒立安定化+第二振子の振り上げ

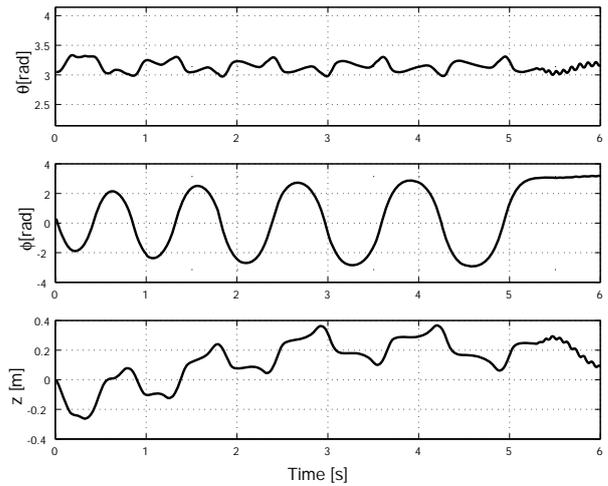


図 5: 実験による検証 (安定化制御+振り上げ)

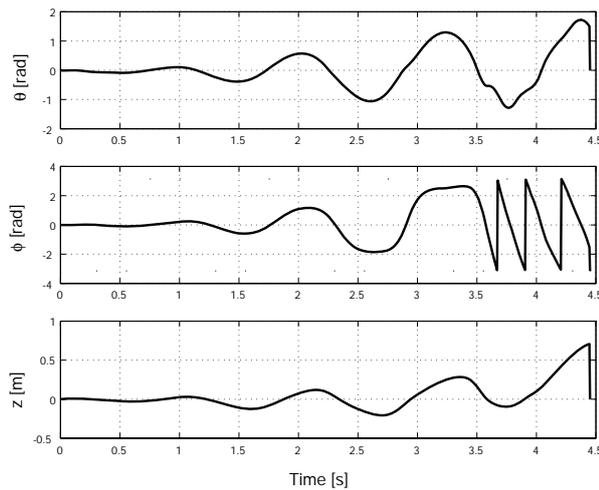


図 4: 実験による検証 (制振制御+振り上げ)

表 1: 制御パラメータ

	図 2	図 3	図 4	図 5
R_1	40.0	3.0	40.0	8.0
K_1	1.0	1.0	1.0	3.0
ϵ_1	1.0	1.0	1.0	1.0
u_{a1}	8.0	50.0	1.0	0.2
μ	$\pi/9$	$\pi/6$	$1\pi/2$	$5\pi/18$

6 おわりに

本稿では、台車型の直列二重倒立振りシステムに対し、第一振子を初期の状態に保ちながら第二振子のみを振り上げる部分的振り上げ制御問題を考えた。提案法は、ロバスト性を持つスライディングモード制御を用いた第一振子の安定化および台車の位置制御則にエネルギー制御による振り上げ制御則を加え、ロバスト性を利用することでお互いを外乱とみなし、二つの制御を同時に達成する手法を提案した。数値シミュレーションおよび実機での実験により本手法の有効性を証明した。

参考文献

- [1] K. J. Åström, K. Furuta: Swinging up a pendulum by energy control, *Automatica*, **36-2**, 287/295 (2000)
- [2] M. Yamakita, M. Iwasaki, Y. Sugahara and K. Furuta: Robust swing up control of double pendulum, *Proc. of the American Control Conference*, 290/295 (1995)
- [3] 逸見 知弘, Mingcong Deng, 井上 昭, 植木 信幸, 平嶋 洋一: 台車型直列二重倒立振り子の振り上げ制御, *日本機械学会論文集 C 編* 2005.4
- [4] 美多, 陳: スライディングモード制御とロボットアームの軌道制御, *システム制御情報学会誌*, **34-1**, 50/55 (1990)
- [5] 野波, 田: スライディングモード制御-非線形ロバスト制御の設計理論-, コロナ社, (1994)