

公表用解答例

受験番号

氏名

総 得 点

問題1 (30点)

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

得
点

(2)

関数 $y = \cos x$ は連続関数なので

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= \cos\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right) \\ &= \cos 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3)

$y = \left\{ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right\}^{x^2}$ と置き、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log y$ を計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log y &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \log \left\{ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \{ \cos(x^{-1}) \}}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\sin(x^{-1})}{\cos(x^{-1})} \cdot (-x^{-2})}{-2x^{-3}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^{-1})}{x^{-1}} \cdot \frac{1}{\cos(x^{-1})} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

指数関数は連続関数なので

$$\begin{aligned} \log\left(\lim_{x \rightarrow \infty} y\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log y = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

公表用解答例

受験番号

氏名

問題2 (30点)

得点

(1)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

(2)

最初の3試合でAが2勝1敗になるので、求める確率は

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

(3)

5試合目でAが優勝するときは最初の4試合でAが2勝2敗になるので、このときの確率は

$$\begin{aligned} {}_4C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{16}{81} \end{aligned}$$

したがって、求める確率は

$$\frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$$

公表用解答例

受験番号

氏名

問題3 (40点)

得点

(1)

AP : PF = $s : 1 - s$ とすると点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OF} + (1-s)\overrightarrow{OA} \\ &= \frac{3s}{5}\vec{b} + (1-s)\vec{a}\end{aligned}$$

と表される。

BP : PE = $t : 1 - t$ とすると点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OE} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2t}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。

 $\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立なので、連立方程式

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2t}{3} \\ 1-t = \frac{3s}{5} \end{cases}$$

を得る。これを解くと、 $s = \frac{5}{9}$, $t = \frac{2}{3}$ となるので、点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

公表用解答例

受験番号

氏名

(2)

点 Q は線分 OP の延長線上にあるので点 Q の位置ベクトルは点 P の位置ベクトルの実数倍になるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= u\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{4u}{9}\vec{a} + \frac{u}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

と実数 u を用いて表せる。

また、点 Q は線分 AB 上にあるので、 $\frac{4u}{9} + \frac{u}{3} = 1$ となる。この方程式を解くと

$u = \frac{9}{7}$ を得る。

したがって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$$

公表用解答例

受験番号

氏名

(3)

(1) から $AP : PF = \frac{5}{9} : \frac{4}{9} = 5 : 4$

(4)

(2) から $AQ : QB = \frac{3}{7} : \frac{4}{7} = 3 : 4$