

公表用解答例

受験番号

氏名

総 得 点

得
点

問題 1 (40 点)

- (1) 問題の無限級数は公比が
- $\log_2 x$
- の等比級数であるので、

収束するための必要十分条件は $-1 < \log_2 x < 1$ 。よって、求める範囲は $\frac{1}{2} < x < 2$ 。

- (2)

$$(2 \cos^2 x - 1) - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, 2$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ なので、 $\cos x = \frac{1}{2}$ 。 $0 \leq x < 2\pi$ なので、 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ 。

- (3) 接点の
- x
- 座標を
- p
- とする。

すると、接点の y 座標は $p^3 - 9p$ 、接線の傾きは $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=p} = 3p^2 - 9$ なので、

接線の方程式は $y - (p^3 - 9p) = (3p^2 - 9)(x - p)$ 、 $y = (3p^2 - 9)x - 2p^3$ 。

接線は $(2, -10)$ を通るので、 $-10 = (3p^2 - 9) \times 2 - 2p^3$ 。これを解くと、

$$p^3 - 3p^2 + 4 = 0, \quad (p+1)(p-2)^2 = 0, \quad p = -1, 2。$$

$p = -1$ のとき、接線の方程式は $y = -6x + 2$ 。 $p = 2$ のとき、接線の方程式は $y = 3x - 16$ 。

よって、求める方程式は、 $y = -6x + 2$ 、 $y = 3x - 16$ 。

- (4) 問題の行列が直交行列なので、 $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & a \\ \frac{4}{5} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

これより、 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + a^2 = 1$ —①、 $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + ab = 0$ —②、 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + b^2 = 1$ —③。

①より $a = \pm \frac{4}{5}$ 。③より $b = \pm \frac{3}{5}$ 。

これらの値の組み合わせのうち②が成り立つものは、 $(a, b) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 。

よって、 $a + b = \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$ 。

公表用解答例

受験番号

氏名

問題 2 (30 点)

得
点

(1)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin nx \sin x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(nx - x) - \cos(nx + x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} \sin(n-1)x - \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

〈別解〉

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin nx \sin x \, dx &= \left[\sin nx (-\cos x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n \cos nx (-\cos x) \, dx = n \int_0^{\pi} \cos nx \cos x \, dx \\ &= n \left(\left[\cos nx \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-n \sin nx) \sin x \, dx \right) = n^2 \int_0^{\pi} \sin nx \sin x \, dx \end{aligned}$$

よって, $(1 - n^2) \int_0^{\pi} \sin nx \sin x \, dx = 0$. $1 - n^2 \neq 0$ なのので $\int_0^{\pi} \sin nx \sin x \, dx = 0$.

(3) 問題の等式より,

$$\int_0^{\pi} \sin^5 x \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (a_5 \sin 5x + a_3 \sin 3x + a_1 \sin x) \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^6 x \, dx \\ &= \frac{5}{32} \pi + \int_{\pi/2}^0 \sin^6(\pi - t) (-dt) \quad (t = \pi - x \text{ とした}) \\ &= \frac{5}{32} \pi + \int_0^{\pi/2} \sin^6 t \, dt = \frac{5}{32} \pi + \frac{5}{32} \pi = \frac{5}{16} \pi \\ \text{(右辺)} &= a_5 \int_0^{\pi} \sin 5x \sin x \, dx + a_3 \int_0^{\pi} \sin 3x \sin x \, dx + a_1 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \\ &= a_5 \times 0 + a_3 \times 0 + a_1 \times \frac{\pi}{2} \quad ((1), (2) \text{ より}) \\ &= \frac{\pi}{2} a_1 \end{aligned}$$

よって, $\frac{5}{16} \pi = \frac{\pi}{2} a_1$, $a_1 = \frac{5}{8}$.

公表用解答例

受験番号		氏名	
------	--	----	--

問題

3

 (30 点)

得点		
----	--	--

(1)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & -2r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r$$

(2) $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

(3)

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} (2r \cos \theta)^2 |2r| dr \right) d\theta \\ &= 8 \left(\int_{r=0}^{r=1} r^3 dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= 8 \times \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \times \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

公表用解答例

受験番号

氏名

問題 4 (30 点)

得
点

$$(1) \ a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + a_3 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix} \text{ とすると, } A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{。}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ であるから, } A \text{ には逆行列 } A^{-1} \text{ が存在する。}$$

$$\text{従って, } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{。}$$

よって, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ は一次独立である。

$$(2) \ \vec{v} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + a_3 \vec{x}_3 \text{ とおくと,}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ であり,}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \vec{v} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \vec{v} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{。}$$

よって, $\vec{v}$ は $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ の一次結合で表すことができ, $\vec{v} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3$ 。