詫間電波工業高等専門学校研究紀要　第 33 号 (2005)

無質量モードを持つポアンカレゲージ理論の摂動展開

福間一巳*

Perturbative Expansion of Poincaré Gauge Theory with Massless Modes

Kazumi FUKUMA

Synopsis

When massless Lorentz gauge fields interact with Dirac particles, the linear approximation of equations of motion in Poincaré gauge theory is inconsistent. We propose an approximation method for Poincaré gauge theory. The new perturbative expansion of Poincaré gauge theory is consistent when massless Lorentz gauge fields interact with Dirac particles. We also discuss the existence of such a perturbative solutions in a toy model and Poincaré gauge theory.

1　はじめに

我々は，論文 1) で，Lorentz ゲージ場が無質量の場合において，ポアンカレゲージ理論の量子論的な可能性を調べた．そこでは，ノルムの正値性を示すために源に対する拘束条件を用いた．これは，Lorentz ゲージ場の方程式の線形部分がもつ対称性から導かれる自己相互作用まで含めた源の拘束条件である．この拘束条件により場の方程式の線形部分がもつ対称性に対応する Lorentz ゲージ場の成分が固定され，自己相互作用まで含めた源から残りの Lorentz ゲージ場の成分が決定されることを前提として議論を行った．また，線形近似の問題点も指摘した．本研究では，無矛盾な摂動展開を与えることで，この前提が成立している事を具体的に示すことを目的とする．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では， Poincaré ゲージ理論の Lagrangian 密度，場の方程式などを述べ，理論の定式化を行う．第 3 節では，線形近似とその問題点について述べ，第 4 節で，それを解決する摂動展開を示す．第 5 節では，摂動展開の具体例をベクトル場で示す．第 6 節では，摂動展開の可解性を調べる．

2　Poincaré ゲージ理論

Poincaré ゲージ理論は物質場の持つ Poincaré 対称性を局所化したゲージ理論である．この節では理論の定式化を行い，運動方程式を導く．

物質場の集合 $q^A(x)$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ とその作用積分

$$I_0 = \int d^4x L_0 \tag{1}$$

を考える．ここで Lagrangian 密度[1] $L_0 = L_0(q^A,\ q^A{}_{,\mu})$ は物質場 q^A とその微分 $q^A{}_{,\mu}$ [2] の関数である．この作用積分が推進変換と Lorentz 変換に関して不変であると仮定する．これらの無限小変換は

$$\left\{ \begin{array}{lll} x^\mu & \to & x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu\ , \\ q^A(x) & \to & q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu}q(x))^A \end{array} \right. \tag{2}$$

*詫間電波工業高等専門学校 電子制御工学科

[1]以下では， Lagrangian 密度を Lagrangian と略記する．

[2]q^A の微分 $\partial q^A/\partial x^\mu$ を $\partial_\mu q^A$ または $q^A{}_{,\mu}$ と略記する．

で与えられる．ただし，

$$q(x) = (q^A(x)) = (q^1(x), q^2(x), \cdots, q^N(x)) \tag{3}$$

は物質場の成分の集合をまとめて表したものであり，$S_{\mu\nu}$ $(= -S_{\nu\mu})$ はこれらの成分に対する Lorentz 群の 6 個の無限小生成演算子である．また，$\omega^{\mu\nu}$ $(= -\omega^{\nu\mu})$ は 6 個の無限小 Lorentz 変換のパラメータ，ϵ^μ は 4 個の無限小推進のパラメータである．

ここで，この無限小変換を局所的にした変換

$$\begin{cases} x^\mu & \rightarrow \quad x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\,, \\ q^A(x) & \rightarrow \quad q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(x)(S_{\mu\nu}q(x))^A \end{cases} \tag{4}$$

を考える．ただし，$\epsilon^\mu(x) + \omega^\mu{}_\nu(x)x^\nu$ を改めて $\epsilon^\mu(x)$ と置いた．$\epsilon^\mu(x)$ と $\omega^{\mu\nu}(x)$ は座標の無限小任意関数である．(4) の第 1 式は一般座標変換の無限小変換である．ところで，スピノール場は Lorentz 変換の既約 2 価表現であるが，一般座標変換の既約表現でないことが知られている．そこで，各点で接空間を考え，その接空間でスピノール場を定義する．各点での接空間と座標空間を結ぶものとして 4 脚場 $b_k{}^\mu$ が導入される．このとき，局所化した変換は

$$\begin{cases} x^\mu & \rightarrow \quad x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\,, \\ q^A(x) & \rightarrow \quad q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \frac{i}{2}\omega^{kl}(x)(S_{kl}q(x))^A\,, \\ b_k{}^\mu(x) & \rightarrow \quad b_k{}^{\mu\prime}(x') = b_k{}^\mu(x) + \partial_\nu\epsilon^\mu(x)b_k{}^\nu(x) + \omega_k{}^l(x)b_l{}^\mu(x) \end{cases} \tag{5}$$

となる．$\epsilon^\mu(x)$ と $\omega^{kl}(x)$ は座標の無限小任意関数であり，ギリシャ文字の添え字は座標の成分を表すのに，ラテン文字の添え字は内部 Lorentz 変換に対してベクトルとして変換する成分を表すのに用いている．

この変換 (5) に対し不変な作用積分を作るために，物質場の微分 $q^A{}_{,\mu}$ を共変微分

$$D_k q^A = b_k{}^\mu \left(q^A{}_{,\mu} - \frac{i}{2}A^{kl}{}_\mu (S_{kl}q)^A \right) \tag{6}$$

に，体積要素 d^4x を不変体積要素 $b\,d^4x$ に置き換える．ここで，$A^{kl}{}_\mu$ $(= -A^{lk}{}_\mu)$ は Lorentz ゲージ場と呼ばれ，無限小変換は

$$\begin{aligned} A^{kl}{}_\mu(x) \quad \rightarrow \quad A^{kl}{}_\mu{}'(x') = {} & A^{kl}{}_\mu(x) + \partial_\mu\omega^{kl}(x) + \omega^k{}_m(x)A^{ml}{}_\mu(x) \\ & + \omega^l{}_m(x)A^{km}{}_\mu(x) - \partial_\mu\epsilon^\nu(x)A^{kl}{}_\nu(x) \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．また，b は[3]

$$b_{k\mu}b^{l\mu} = \delta_k{}^l,\ b_{k\mu}b^{k\nu} = \delta_\mu{}^\nu \tag{8}$$

で定義される 4 脚場 $b_k{}^\mu$ の双対場 $b_{k\mu}$ より，

$$b = -\det(b_{k\mu}) \tag{9}$$

と与えられる．4 脚場の双対場 $b_{k\mu}$ の無限小変換は，(5)，(8) より

$$b_{k\mu}(x) \rightarrow b_{k\mu}{}'(x') = b_{k\mu}(x) - \partial_\mu\epsilon^\nu(x)b_{k\nu}(x) + \omega_k{}^l(x)b_{l\mu}(x) \tag{10}$$

となるが，これより，$b\,d^4x$ が不変体積要素であることが導かれる．この置き換えにより，一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対して不変な物質場の作用積分は

$$I_M = \int d^4x \mathcal{L}_M \tag{11}$$

[3] ラテンの添え字 $k, l, m, \cdots$ は Minkowski 計量 $(\eta_{kl}) = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ と $(\eta^{kl}) = (\eta_{kl})^{-1}$ を用いて上げ下げをする．この論文では主に論文 [2)] の記号法を用いる．

となる．ここで

$$\mathcal{L}_M = bL_M = bL_0(q^A, D_k q^A) \tag{12}$$

である．

4 脚場と Lorentz ゲージ場の 1 階微分について高々 2 次の最も一般的な作用積分を定義するため， 4 脚場の強さとゲージ場の強さの既約分解を行い，その既約成分を用いて不変量を定義し，作用積分を構成する．4 脚場の強さと Lorentz ゲージ場の強さは，それぞれ，

$$\mathcal{C}_{klm} = 2b_{k\nu}b_{[l}{}^{\mu}b_{m]}{}^{\nu}{}_{,\mu} - 2A_{k[l\mu}b_{m]}{}^{\mu} , \tag{13}$$

$$F_{klmn} = 2b_{[n}{}^{\mu}b_{m]}{}^{\nu}(A_{kl\nu,\mu} - A_{pk\mu}A^{p}{}_{l\nu}) \tag{14}$$

で与えられる[4 5]．これらの場の強さは一般座標変換と局所 Lorentz 変換のもとで次のように変換する．

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{klm}(x) \quad &\to \quad \mathcal{C}_{klm}{}'(x') = \mathcal{C}_{klm}(x) + \omega_k{}^p(x)\mathcal{C}_{plm}(x) + \omega_l{}^p(x)\mathcal{C}_{kpm}(x) + \omega_m{}^p(x)\mathcal{C}_{klp}(x) , \qquad (15) \\ F_{klmn}(x) \quad &\to \quad F_{klmn}{}'(x') = F_{klmn}(x) + \omega_k{}^p(x)F_{plmn}(x) + \omega_l{}^p(x)F_{kpmn}(x) + \omega_m{}^p(x)F_{klpn}(x) \\ &\qquad + \omega_n{}^p(x)F_{klmp}(x) . \qquad (16) \end{aligned}$$

これら場の強さから，Appendix A に示す 9 つの既約な場の強さ ${}^T\mathcal{C}_{klm}$, ${}^V\mathcal{C}_k$, ${}^A\mathcal{C}_k$, A_{klmn}, B_{klmn}, C_{klmn}, E_{kl}, G_{kl}, F が定義される．4 脚場と Lorentz ゲージ場の 1 階微分について高々 2 次で，空間反転に対し不変であり，宇宙項のない，最も一般的な作用積分は

$$I_G = \int d^4x \mathcal{L}_G \tag{17}$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G \quad = \quad & b(\alpha\ {}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm} + \beta\ {}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k + \gamma\ {}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k + a_1 A_{klmn}A^{klmn} + a_2 B_{klmn}B^{klmn} \\ & + a_3 C_{klmn}C^{klmn} + a_4 E_{kl}E^{kl} + a_5 G_{kl}G^{kl} + a_6 F^2 + aF) \qquad (18) \end{aligned}$$

である．ここで，α，β，γ，a と a_i $(i = 1 \sim 6)$ は任意のパラメータである．

Lagrangian のなかの 4 つの不変量，${}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm}$, ${}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k$, ${}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k$, F は Lorentz ゲージ場の 2 次の項を含むので Lorentz ゲージ場は質量を持つことが出来る．質量項の存在は素粒子の電弱相互作用および強い相互作用のゲージ理論と異なる Poincaré ゲージ理論の特徴である．

この作用積分は次の形に書き換えることが出来る．

$$I_G = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\kappa}bR(\{\ \}) + \partial_\mu \left(\frac{1}{\kappa} bb^{n\mu V}\mathcal{C}_n \right) + \mathcal{L}_{mix} + \mathcal{L}_L \right\} . \tag{19}$$

だだし，$R(\{\ \})$ は $g_{\mu\nu} = b_{k\mu}b^k{}_\nu$ とした時の Christoffel の接続から定義されたスカラー曲率である．Christoffel の接続 $\left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\}$，曲率テンソル $R(\{\ \})^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$，Ricci テンソル $R(\{\ \})_{\mu\nu}$，スカラー曲率 $R(\{\ \})$ の定義は次の通りである．

$$\begin{aligned} \left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\} \quad &= \quad \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) , \qquad (20) \\ R(\{\ \})^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \quad &= \quad \partial_\lambda \left\{ {\mu \atop \nu\,\rho} \right\} - \partial_\rho \left\{ {\mu \atop \nu\,\lambda} \right\} + \left\{ {\mu \atop \sigma\,\lambda} \right\}\left\{ {\sigma \atop \nu\,\rho} \right\} - \left\{ {\mu \atop \sigma\,\rho} \right\}\left\{ {\sigma \atop \nu\,\lambda} \right\} , \qquad (21) \\ R(\{\ \})_{\mu\nu} \quad &= \quad R(\{\ \})^\lambda{}_{\mu\nu\lambda} , \qquad (22) \\ R(\{\ \}) \quad &= \quad R(\{\ \})_{\mu\nu} g^{\mu\nu} . \qquad (23) \end{aligned}$$

---

[4] $A_{\cdots(k\cdots l)\cdots} = \frac{1}{2}(A_{\cdots k \cdots l \cdots} + A_{\cdots l \cdots k \cdots})$, $A_{\cdots[k\cdots l]\cdots} = \frac{1}{2}(A_{\cdots k \cdots l \cdots} - A_{\cdots l \cdots k \cdots})$.

[5] 共変微分の交換関係は $D_k D_l - D_l D_k = \frac{i}{2} F_{mnkl} S^{kl} + \mathcal{C}^m{}_{kl} D_m$ となる．

また，$\mathcal{L}_{mix}$，$\mathcal{L}_L$ は

$$\mathcal{L}_{mix} = b\left\{\left(\alpha+\frac{2}{3}a\right)\ {}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm}+\left(\beta-\frac{2}{3}a\right)\ {}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k+\left(\gamma+\frac{3}{2}a\right)\ {}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k\right\}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_L &= b(a_1A_{klmn}A^{klmn}+a_2B_{klmn}B^{klmn}+a_3C_{klmn}C^{klmn}\\ &\quad +a_4E_{kl}E^{kl}+a_5G_{kl}G^{kl}+a_6F^2) \qquad (25)\end{aligned}$$

で定義される．$\mathcal{L}_{mix}$ は 4 脚場の微分と Lorentz ゲージ場が混在している Lagrangian であり，$\mathcal{L}_L$ は 4 脚場の微分を含まない Lorentz ゲージ場の Lagrangian である．

条件 $\alpha+2a/3=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ を仮定すると，$\mathcal{L}_{mix}$ が消え，Lorentz ゲージ場の質量項がなくなる．また，場の方程式について線形近似を行った時，4 脚場と Lorentz ゲージ場はそれぞれが別々の場の方程式に従うようになる．さらに， Lorentz ゲージ場が零であるとすると作用積分は Einstein のものと等価になる．

物質場とゲージ場の作用積分

$$I=\int d^4x(\mathcal{L}_G+\mathcal{L}_M) \qquad (26)$$

から，$b_{k\mu}$ に対する運動方程式は

$$\begin{aligned}&-2b_l{}^\mu b_m{}^\nu D_\nu I^{klm}-2b_l{}^\mu\ {}^V\mathcal{C}_mI^{klm}+b^{p\mu}\mathcal{C}_{plm}I^{klm}-2b_p{}^\mu\mathcal{C}_{lm}{}^kI^{plm}\\ &\qquad -2b_p{}^\mu F_{lmn}{}^kH^{lmnp}+b^{k\mu}\mathcal{L}_G/b-\overset{(M)}{T}{}^{k\mu}=0 \qquad (27)\end{aligned}$$

となり，$A_{kl\mu}$ に対する運動方程式は

$$-4b_m{}^\mu b_n{}^\nu D_\nu H^{klmn}-2b^{r\mu}\mathcal{C}_{rnm}H^{klmn}-4b_m{}^\mu\ {}^V\mathcal{C}_nH^{klmn}-4b_m{}^\mu I^{[kl]m}-\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu}=0 \qquad (28)$$

となる．ただし，H^{klmn}，I^{klm}，$\overset{(M)}{T}{}^{k\mu}$，$\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu}$，$D_\mu I^{klm}$，$D_\mu H^{klmn}$ は

$$\begin{aligned}H^{klmn} &= 12a_1A^{klmn}+8a_2B^{[kl][mn]}+4a_3C^{klmn}+2a_4(E^{k[m}\eta^{n]l}-E^{l[m}\eta^{n]k})\\ &\quad +2a_5(G^{k[m}\eta^{n]l}-G^{l[m}\eta^{n]k})+2a_6F\eta^{k[m}\eta^{n]l}+a\eta^{k[m}\eta^{n]l}, \qquad (29)\\ I^{klm} &= 2\alpha\ {}^T\mathcal{C}^{k[lm]}+2\beta\eta^{k[l}\ {}^V\mathcal{C}^{m]}+\frac{1}{3}\gamma\epsilon^{rklm}\ {}^A\mathcal{C}_r, \qquad (30)\\ \overset{(M)}{T}{}^{k\mu} &= b_l{}^\mu\frac{\partial L_M}{\partial D_lq^A}(D_kq)^A-b^{k\mu}L_M, \qquad (31)\\ \overset{(M)}{S}{}^{kl\mu} &= \frac{\partial L_M}{\partial q^A{}_{,\mu}}i(S^{kl}q)^A, \qquad (32)\\ D_\mu I^{klm} &= I^{klm}{}_{,\mu}-A^k{}_{p\mu}I^{plm}-A^l{}_{p\mu}I^{kpm}-A^m{}_{p\mu}I^{klp}, \qquad (33)\\ D_\mu H^{klmn} &= H^{klmn}{}_{,\mu}-A^k{}_{p\mu}H^{plmn}-A^l{}_{p\mu}H^{kpmn}-A^m{}_{p\mu}H^{klpn}-A^n{}_{p\mu}H^{klmp} \qquad (34)\end{aligned}$$

と定義されている．

3　線形近似

この節では真空，つまり $q^A=0$ のときの $A_{kl\mu}$ と $c_{k\mu}$ に対する線形近似を行い，Lorentz ゲージ場が質量をもたないとき，すなわち，パラメータ条件 $\alpha+2a/3=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ が満たされているとき，線形近似された場の方程式が矛盾を導くことを指摘する．

$A_{kl\mu}$ と $c_{k\mu}$ が小さく，場の方程式において $A_{kl\mu}$ と $c_{k\mu}$ について 1 次の項のみを残せばよいような弱場の状況を考える．このとき，ラテン文字とギリシャ文字の添え字の区別は必要は無くなる．以下では，ラテン文字の添え字のみを用い，添え字の上げ下げは Minkowski 計量を用いて行う．線形近似のもとで， 2 つの場 A_{klm} と c_{kl} の方程式は，パラメータ条件 $\alpha+2a/3=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ のおかげで，混ざり

合わない．つまり，A_{klm} の方程式は A_{klm} のみを含み，c_{kl} を含まない，また，c_{kl} の方程式は c_{kl} のみを含み，A_{klm} を含まない．C_{klm} と F_{klmn} は，線形近似のもとで，それぞれ，

$$C_{klm} = 2c_{k[l,m]}\,, F_{klmn} = 2A_{kl[m,n]} \tag{35}$$

と表される．4 脚場の方程式 (27) とパラメータ条件 $\alpha + 2a/3 = \beta - 2a/3 = \gamma + 3a/2 = 0, a = 1/(2\kappa)$ より

$$I^{klm}{}_{,m} = 0 \tag{36}$$

を得る．ここで，

$$I^{klm} = -\frac{1}{3\kappa}\left(2\ {}^{T}C^{k[lm]} - 2\eta^{k[l\ V}C^{m]} + \frac{3}{4}\epsilon^{rklm\ A}C_r\right) \tag{37}$$

である．Lorentz ゲージ場の方程式 (28) から

$$H_0{}^{klmn}{}_{,n} = 0 \tag{38}$$

を得る．ここで，$H_0{}^{klmn}$ は H^{klmn} から定数項を除き線形近似したものである．

Lorentz ゲージ場の線形近似後の場の方程式を調べる．場の方程式の局所対称性と Lorentz ゲージ場の源に対する拘束条件を調べるため，方程式を Appendix B で定義された Lorentz ゲージ場に対するスピン射影演算子 $P_X(S^p)_{klmk'l'm'}$ を用いて書き直す．場の方程式は運動量空間で[6]

$$\mathcal{D}\psi = Q \tag{39}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \;=\; & -k^2[\,4(6a_2 + a_5)P_T(2^+) + 8(3a_2 + a_3)P_T(2^-) + 4(2a_3 + a_4)P_H(1^+) + 4(a_4 + a_5)P_H(1^-)\\ & +4(a_5 + 3a_6)P_V(0^+) + 8(9a_1 + a_3)P_A(0^-)\,]\end{aligned} \tag{40}$$

である．また，$\psi\ (= \psi_{klm})$ と $Q\ (= Q_{klm})$ は，それぞれ， Lorentz ゲージ場 $A\ (= A_{klm})$ と源 $\mathcal{S}\ (= \mathcal{S}_{klm})$ の Fourier 変換である．

場の方程式 (39) とスピン射影演算子の性質 (106) より，源に対する拘束条件と “ゲージ” 対称性を見出す．拘束条件は

$$P_G(1^+)Q = P_G(1^-)Q = 0 \tag{41}$$

である．場の方程式 (39) は “ゲージ” 変換

$$\psi \to \psi' = \psi + P_G(1^+)\Lambda_G(1^+) + P_G(1^-)\Lambda_G(1^-) \tag{42}$$

のもとで不変である．ここで，$\Lambda_G(1^+)$ と $\Lambda_G(1^-)$ は ψ と同程度に微小で，その他の点では任意の運動量の関数である．

座標空間では，拘束条件 (41) は

$$\partial_m \mathcal{S}_{kl}{}^m = 0 \tag{43}$$

となり，“ゲージ” 変換は

$$A^{kl}{}_m \to A^{kl}{}_m{}' = A^{kl}{}_m + \partial_m \lambda^{kl} \tag{44}$$

で与えられる．ただし，$\lambda^{kl}\ (= -\lambda^{lk})$ は $A^{kl}{}_m$ と同程度に微小で，その他の点では任意の関数である．

[6]次のような省略を行う．(i) Lorentz ゲージ場 A_{klm} や Lorentz ゲージ場に対するスピン射影演算子 $P_X(S^p)_{klmk'l'm'}$ と同じ添え字の対称性を有するテンソルについて，その添え字を省略する．(ii) $P_{klmk'l'm'}Q^{k'l'm'}$ を省略形 PQ で表す．

さらに，場の方程式 (39) とスピン射影演算子の性質 (106) から，パラメータ a_i ($i = 1 \sim 6$) が特定の条件を満たす時に，源 Q に対する付加的な拘束条件と場の方程式 (39) を不変に保つ付加的な "ゲージ" 変換が存在することが分かる．これらは次の通りである．

(1) 条件 $6a_2 + a_5 = 0$ が満たされる場合 : $P_T(2^+)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_T(2^+)\Lambda(2^+)$,   (45)

(2) 条件 $3a_2 + a_3 = 0$ が満たされる場合 : $P_T(2^-)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_T(2^-)\Lambda(2^-)$,   (46)

(3) 条件 $2a_3 + a_4 = 0$ が満たされる場合 : $P_H(1^+)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_H(1^+)\Lambda(1^+)$,   (47)

(4) 条件 $a_4 + a_5 = 0$ が満たされる場合 : $P_H(1^-)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_H(1^-)\Lambda(1^-)$,   (48)

(5) 条件 $a_5 + 3a_6 = 0$ が満たされる場合 : $P_V(0^+)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_V(0^+)\Lambda(0^+)$,   (49)

(6) 条件 $9a_1 + a_3 = 0$ が満たされる場合 : $P_A(0^-)Q = 0$, $\psi \to \psi' = \psi + P_A(0^-)\Lambda(0^-)$.   (50)

ここで，$\Lambda(S^{\pm})$ ($S = 0, 1, 2$) は運動量の関数であり，ψ と同程度に微小で，その他の点では任意である．

よく知られているように，Lorentz ゲージ場と最小結合している Dirac 場のスピン密度 ${S_D}^{klm}$ は拘束条件 $\partial_m {S_D}^{klm} = 0$，等価な別の表示では $P_G(1^+)S_D = P_G(1^-)S_D = 0$ を満たさない．つまり，線形近似は矛盾を引き起こす．故に，理論に Dirac 場を包含させた場合には非線形理論を考えなければならない．

4　無矛盾な摂動展開

簡単のため，$c_{k\mu} = b_{k\mu} - \eta_{k\mu}$ がゼロになる極限を考える．場の方程式 (28) の左辺を Lorentz ゲージ場について線形な部分と非線形な部分とに分解する．場の方程式は

$$DA + \Phi(A) = \mathcal{S} \tag{51}$$

と表すことができる．ここで，A $(= A_{klm})$ は Lorentz ゲージ場，D $(= D_{klmk'l'm'})$ は 2 階の微分演算子 (これの Fourier 変換は式 (40) に与えられている.)，$\Phi(A)$ $(= \Phi(A)_{klm})$ は A_{klm} と $\partial_n A_{klm}$ について 2 次または 3 次の多項式，$\mathcal{S}$ $(= \mathcal{S}_{klm})$ はスピン密度である．スピン射影演算子，$P_T(2^{\pm})$，$P_H(1^{\pm})$，$P_G(1^{\pm})$，$P_A(0^+)$，$P_V(0^-)$ を用いて場の方程式を射影する[7]．その結果，次の 2 種類の式を得る．
(i) スピン射影演算子[8] P_x が $P_x D \neq 0$ を満たすとき

$$c_x \Box P_x A + P_x \Phi(A) = P_x \mathcal{S} \ . \tag{52}$$

ただし，c_x は式 (40) の括弧の中の式における P_x の係数であり，$\Box$ は d'Alembertian である．
(ii) スピン射影演算子 P_y が $P_y D = 0$ を満たすとき

$$P_y \Phi(A) = P_y \mathcal{S} \ . \tag{53}$$

$P_y \mathcal{S} \neq 0$ のとき，線形近似を行うと式 (53) が矛盾する．この場合は線形近似を採用してはならない．ここでは，むしろ，(52) と (53) の各項がすべて同じ大きさであると考えるべきである．もし，場の方程式 (51) が伝播する解を持つならば，次のように考えても良いだろう．(i) 伝播するモードは有効源 $\mathcal{S}^{(\mathrm{eff})} = \mathcal{S} - \Phi(A)$ から放出され，この有効源は拘束条件 $P_y \mathcal{S}^{(\mathrm{eff})} = 0$ を満たす．(ii) 線形近似のとき "ゲージ" 自由度または付加的な "ゲージ" 自由度に対応していた $P_y A$ が決定される．このようになっていれば，Dirac 場と結合する，Lorentz ゲージ場の無質量モードを持つ Poincaré ゲージ理論も無矛盾に定義される．

したがって，場のすべてが同じ大きさの微少量であると仮定するのではなく，各射影成分が異なる大きさの微少量であることを仮定して無矛盾な摂動展開を定義すべきである．伝播するモードは結合定数の 1 次，'ゲージ" 自由度または付加的な "ゲージ" 自由度に対応していた $P_y A$ は結合定数の分数次からの摂動展開を考えればよい．Poincaré ゲージ理論でこの展開を説明するよりはベクトル場のモデルで例示するほうが分かりやすい．次節でこれを行う．

[7] この演算子の組は式 (105) に示されるように完全系をなす．
[8] P_x と P_y の各々は $P_T(2^{\pm})$，$P_H(1^{\pm})$，$P_G(1^{\pm})$，$P_A(0^+)$，$P_V(0^-)$ の 1 つを表す．

5 ベクトル場のモデル

この節では，これまで述べた線形近似の問題と新しい摂動展開を簡単なモデルで説明する．

Lorentz ゲージ場の無質量モードを持つ Poincaré ゲージ理論に相当するベクトル場の Lagrangian 密度は

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\lambda(A_\mu A^\mu)^2 + eJ^\mu A_\mu \tag{54}$$

である．ここで，$F_{\mu\nu}$ は場の強さ，J^μ は外部電流である．λ, e は無次元の定数であり，$\lambda \sim 1$，$e << 1$ とする．場の強さは

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu \tag{55}$$

で定義され，ゲージ変換

$$A_\mu \longrightarrow {A_\mu}' = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{56}$$

に対する不変量になっている．外部電流 J^μ が保存している場合，つまり，

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{57}$$

のとき，ゲージ変換により，Lagrangian 密度は

$$L \longrightarrow L' = L + \lambda((A_\mu A^\mu)A^\nu \partial_\nu \Lambda + \Lambda\text{の 2 次以上の項}) + \partial_\mu(eJ^\mu \Lambda) \tag{58}$$

と変換する．$\lambda = 0$ が電磁理論の場合であり，無限遠で $J^\mu \Lambda$ が零であれば作用はゲージ不変である．

場の方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \lambda(A_\mu A^\mu)A^\nu + eJ^\nu = 0 \tag{59}$$

である．以下では，$\lambda \neq 0$ かつ 外部電流が保存しない場合について，この方程式の解を摂動論を用いて考える．

はじめに素朴な $A_\mu = 0$ からの摂動展開が矛盾を導くことを示す．$\lambda \sim 1$，$e << 1$ より，e に関する摂動展開

$$A_\mu = eA_\mu^{(1)} + e^2 A_\mu^{(2)} + \ldots \tag{60}$$

を考える．各項の決定方程式は次のようになる．

$$\partial_\mu F^{\mu\nu(1)} + J^\nu = 0 \tag{61}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu(2)} = 0 \tag{62}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu(3)} + \lambda {A_\mu}^{(1)} A^{\mu(1)} A^{\nu(1)} = 0 \tag{63}$$

ただし，

$$F_{\mu\nu}{}^{(i)} = \partial_\mu {A_\nu}^{(i)} - \partial_\nu {A_\mu}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{64}$$

である．式 (61) の微分を取ると

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \tag{65}$$

を得る．外部電流が保存していない場合には，矛盾する等式を導き，摂動展開 (60) を行うことが出来ない．

素朴な摂動展開 (60) が破綻している原因はベクトル場の成分をすべて同じように扱って摂動展開を行っているためである．ベクトル場をスピン射影演算子 $P(1^-), P(0^+)$ [9] を用い 2 つの部分に分けて考える．

$$A_\mu = {}^P A_\mu + {}^G A_\mu,\ \text{ただし},\ {}^P A_\mu = P(1^-)_{\mu\nu} A^\nu, {}^G A_\mu = P(0^+)_{\mu\nu} A^\nu. \tag{66}$$

電磁理論では，${}^P A_\mu$ が物理的成分であり，${}^G A_\mu$ がゲージ変換に対応する成分である．場の強さは

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu {}^P A_\nu - \partial_\mu {}^P A_\nu \tag{67}$$

と表される．場の方程式はこの分解により

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + P(1^-)_{\nu\rho}(\lambda(A_\mu A^\mu)A^\rho) + eP(1^-)_{\nu\rho}J^\rho = 0, \tag{68}$$

$$P(0^+)_{\nu\rho}(\lambda(A_\mu A^\mu)A^\rho) + eP(0^+)_{\nu\rho}J^\rho = 0 \tag{69}$$

となる．これより，${}^P A_\mu$ が (68) より，${}^G A_\mu$ が式 (69) より決定されると考えることにより，摂動展開を定めることが出来る．次の摂動展開を仮定する．

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i ({}^G A_\mu{}^{(i)} + {}^G A_\mu{}^{(i)}) \tag{70}$$

ただし，$\rho = e^{1/3}$ である．ρ の各次数で等式 (68), (69) が成立すると考えると，ρ の 3 次までは

$$1\text{次}:\quad \partial_\mu F^{\mu\nu(1)} = 0, 0 = 0, \tag{71}$$

$$2\text{次}:\quad \partial_\mu F^{\mu\nu(2)} = 0, 0 = 0, \tag{72}$$

$$3\text{次}:\quad \partial_\mu F^{\mu\nu(3)} + P(1^-)_{\nu\rho}\lambda(A_\mu{}^{(1)}A^{\mu(1)})A^{\rho(1)} + P(1^-)_{\nu\rho}J^\rho = 0, \tag{73}$$

$$P(0^+)_{\nu\rho}(A_\mu{}^{(1)}A^{\mu(1)})A^{\rho(1)} + P(0^+)_{\nu\rho}J^\rho = 0 \tag{74}$$

となり，1 次の式で ${}^P A^{\mu(1)}$ が，2 次の式で ${}^P A^{\mu(2)}$ が，3 次の式で ${}^P A^{\mu(3)}$ と ${}^G A^{\mu(1)}$ が決定される．以下同様に，i 次の式（これは未知の変数に対し線形である）で ${}^P A^{\mu(i)}$ と ${}^G A^{\mu(i-2)}$ が決定される．特に，${}^P A^{\mu(1)} = 0$, ${}^P A^{\mu(2)} = 0$ のとき

$$\partial_\mu F^{\mu\nu(3)} + \lambda P(1^-)_{\nu\rho}({}^G A_\mu{}^{(1)G} A^{\mu(1)G} A^{\rho(1)}) + P(1^-)_{\nu\rho}J^\rho = 0, \tag{75}$$

$$\lambda P(0^+)_{\nu\rho}({}^G A_\mu{}^{(1)G} A^{\mu(1)G} A^{\rho(1)}) + P(0^+)_{\nu\rho}J^\rho = 0. \tag{76}$$

$A_\mu{}^{(1)}$ を除く成分は，線形の微分方程式を解くことによって決定される．電流から決まる成分以外は零とすると次の表にのように各次数の項が定まる．

次数	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	2k+1	2k+2	$\cdots$
${}^G A_\mu$	0	*	0	*	0	*	$\cdots$	*	0	$\cdots$
${}^P A_\mu$	0	0	0	*	0	*	$\cdots$	*	0	$\cdots$

ここで記号*は電流を起源にして零以外の値を持つ成分を示している．$2k+1$ 次までの式を解くことによって，${}^P A_\mu{}^{(2k+1)}$ と ${}^G A_\mu{}^{(2k-1)}$ が決まる．

この摂動解を求める場合の困難は $A_\mu{}^{(1)}$ の決定方程式を解くことにある．以下では，一様な解について，具体例を示す．解に対し，空間座標に依らないこと，空間成分に対し $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ を要求する．外部電流として

$$(J^0, J^1, J^2, J^3) = (\rho(x^0), 0, 0, 0) \tag{77}$$

[9]スピン射影演算子 $P(1^-), P(0^+)$ は運動量空間において

$$P(1^-)_{kk'} = \eta_{kk'} - \frac{k_k k_{k'}}{k^2}\ ,\quad P(0^+)_{kk'} = \frac{k_k k_{k'}}{k^2}$$

で定義され，$P(1^-)P(1^-) = P(1^-)$, $P(0^+)P(0^+) = P(0^+)$, $P(1^-)P(0^+) = P(0^+)P(1^-) = 0$, $P(1^-) + P(0^+) = Id$ を満たす．ここで，Id はベクトルに対する恒等演算子である．

を考える．このとき,

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 \rho(x^0) \tag{78}$$

となり，外部電流は非保存性を示す．このとき，”ゲージ”成分を

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) = (\partial_0 \Lambda(x^0), 0, 0, 0) \tag{79}$$

と置くと”ゲージ”成分の決定方程式 (76) は

$$3\lambda(\partial_0 \Lambda(x^0))^2 {\partial_0}^2 \Lambda(x^0) + \partial_0 \rho(x^0) = 0 \tag{80}$$

となり,

$$\Lambda(x^0) = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \int \sqrt[3]{-\rho(x^0) + C_1 \lambda} dx^0 + C_2 \tag{81}$$

を得る．これより，有効電流は (定数, 0, 0, 0) となり，保存則を満たす．ただし，この定数は積分定数より決まる．

6 摂動解の存在性

先に述べた Lorentz ゲージ場の方程式の摂動展開は源の性質と付加的な”ゲージ”自由度の有無にも関係しているので，パラメータ条件と源の性質に関する場合分けを行い，異なる摂動展開を考える必要がある．また，そのそれぞれの場合について摂動解の存在性を調べなければならない．

ここでは，パラメータ条件 $\alpha + 2a/3 = \beta - 2a/3 = \gamma + 3a/2 = 0$ のみが満たされており，バラメータ $a_i (i = 1 \sim 6)$ 相互に特別な関係が存在しない場合を議論する．

この場合，Lorentz ゲージ場の”ゲージ”成分 ${}^G A_{klm} = \partial_m \lambda_{kl}$ が前節の式 (76) に相当する式から決定されなければならない．この”ゲージ”成分の決定方程式は λ_{kl} についての 2 階の非線形偏微分方程式である．この式の初期値問題を考える．λ_{kl} と $\partial_0 \lambda_{kl}$ の時間発展方程式として整理しなおす．いま,

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6) = (\partial_0 \lambda_{01}, \partial_0 \lambda_{02}, \partial_0 \lambda_{03}, \partial_0 \lambda_{12}, \partial_0 \lambda_{13}, \partial_0 \lambda_{23}), \tag{82}$$

$$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6) = (\partial_\mu S^{01\mu}, \partial_\mu S^{02\mu}, \partial_\mu S^{03\mu}, \partial_\mu S^{12\mu}, \partial_\mu S^{13\mu}, \partial_\mu S^{23\mu}) \tag{83}$$

とおくと

$$M_{ij} \partial_0 \phi_j + N_i + S_i = 0 \tag{84}$$

のように決定方程式表すことができる．ここで，M_{ij} は λ_{kl} と $\partial_0 \lambda_{kl}$ の a_i を係数とする 2 次式であり, N_i は同様な 3 次式である．この M_{ij} が可逆であることが可解であるための条件である．数式処理システム（Maple9.5, メモリー 2G バイト）を用いて M_{ij} を求めた．$\det M$ を計算し，因数分解すれば解を持つための条件が得られる。しかし, $\det M$ の計算は，メモリー不足のため，直接には行えなかった．a_i $(i = 1 \sim 6)$ に次の条件を課して計算した場合はいずれも $\det M \neq 0$ であった．

$$\text{条件 1：} \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = k, a_5 = -k, a_6 = 0 \tag{85}$$

$$\text{条件 2：} \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = k, a_4 = -2k, a_5 = 0, a_6 = 0 \tag{86}$$

これらの結果よりほとんどのバラメータ範囲で局所的に解を持つことが分かる．

7 まとめ

Lorentz ゲージ場が無質量モードを持ち，一般的な源と相互作用をしている場合において，Lorentz ゲージ場の方程式の無矛盾な摂動展開を与えた．そこで，自己相互作用まで含めた源の拘束条件により，場の方程式の線形部分がもつ対称性に対応する Lorentz ゲージ場の成分が固定されうることをみた．しかし，すべてのパラメータ，すべての源についての摂動展開を調べたわけではない．これらの調査は今後の課題である．さらに，自己相互作用まで含めた源の拘束条件から固定された Lorentz ゲージ場の成分の物理的な影響を調べることは新しい現象を予言するかもしれない魅力のある課題である．

Appendix A 場の強さの規約成分

4 脚場の強さ $\mathcal{C}_{klm}$ の規約成分は次のように定義される．

$$\begin{cases} {}^{T}\mathcal{C}_{klm} = \mathcal{C}_{(kl)m} - \frac{1}{3}(\eta_{kl}{}^{V}\mathcal{C}_{m} - \eta_{m(k}{}^{V}\mathcal{C}_{l)})\ , \\ {}^{V}\mathcal{C}_{k} = \mathcal{C}^{l}{}_{lk}\ , \\ {}^{A}\mathcal{C}_{k} = \frac{1}{6}\epsilon_{klmn}\mathcal{C}^{lmn}\ . \end{cases} \tag{87}$$

ただし，ϵ_{klmn} は Minkowski 時空での完全反対称テンソルであり，$\epsilon_{0123}=1$ としている．Lorentz ゲージ場の強さ F_{klmn} の規約成分は次のように定義される．

$$\begin{cases} A_{klmn} &=& F_{klmn} - F_{kmln} + F_{knlm} + F_{lmkn} - F_{lnkm} + F_{mnkl}\ , \\ B_{klmn} &=& D_{klmn} + D_{mnkl} - D_{knlm} - D_{lmkn}\ , \\ C_{klmn} &=& D_{klmn} - D_{mnkl}\ , \\ E_{kl} &=& 2F_{[kl]}\ , \\ G_{kl} &=& 2F_{(kl)} - \frac{1}{2}\eta_{kl}F\ , \\ F &=& F_{kl}{}^{kl}\ . \end{cases} \tag{88}$$

ただし，

$$D_{klmn} = F_{klmn} - \frac{1}{2}(\eta_{km}F_{ln} + \eta_{ln}F_{km} - \eta_{lm}F_{kn} - \eta_{kn}F_{lm}) + \frac{1}{6}(\eta_{km}\eta_{ln} - \eta_{lm}\eta_{kn})F\ , \tag{89}$$

$$F_{kl} = F_{kml}{}^{m} \tag{90}$$

である．

Appendix B Lorentz ゲージ場のスピン射影演算子

Lorentz ゲージ場のスピン射影演算子の定義として Neville [3] の定義を採用する．まず，Lorentz ゲージ場 A_{klm} を既約成分で表す．

$$A_{klm} = \frac{4}{3}\ T_{m[lk]} + \frac{2}{3}\ \eta_{m[l}V_{k]} + \frac{1}{2}\ \epsilon_{klmn}A^{n}\ . \tag{91}$$

ここで，A_{klm} の既約成分 T_{klm}，V_k，A_k の定義は式 (87) と同様である．A_{klm} をこれらの項に射影する演算子，つまり

$$[P_T\ A]_{klm} = \frac{4}{3}\ T_{m[lk]}\ ,\quad [P_V\ A]_{klm} = \frac{2}{3}\ \eta_{m[l}V_{k]}\ ,\quad [P_A\ A]_{klm} = \frac{1}{2}\ \epsilon_{klmn}A^{n} \tag{92}$$

を満たす演算子は

$$\begin{cases} P_{Tklmk'l'm'} = \frac{1}{3}(2\eta_{k[k'}\eta_{ll']}\eta_{mm'} - \eta_{m[k'}\eta_{kl']}\eta_{lm'} - \eta_{l[k'}\eta_{ml']}\eta_{km'} \\ \qquad\qquad -\eta_{k[k'}\eta_{lm}\eta_{l']m'} + \eta_{km}\eta_{l[k'}\eta_{l']m'})\ , \\ P_{Vklmk'l'm'} = \frac{1}{3}(\eta_{k[k'}\eta_{lm}\eta_{l']m'} - \eta_{km}\eta_{l[k'}\eta_{l']m'})\ , \\ P_{Aklmk'l'm'} = \frac{1}{3}(\eta_{k[k'}\eta_{ll']}\eta_{mm'} + \eta_{m[k'}\eta_{kl']}\eta_{lm'} + \eta_{l[k'}\eta_{ml']}\eta_{km'}) \end{cases} \tag{93}$$

と表される．これらの射影演算子はさらに

$$P_T = P_T(2^+) + P_T(2^-) + P_T(1^+) + P_T(1^-)\ , \tag{94}$$

$$P_V = P_V(1^-) + P_V(0^+)\ , \tag{95}$$

$$P_A = P_A(1^+) + P_A(0^-) \tag{96}$$

とスピン射影演算子に分解される．運動量空間でのスピン射影演算子の定義は以下の通りである．

$$\left\{\begin{aligned}
P_T(2^+)_{klmk'l'm'} &= \frac{1}{2}[\theta_{kp}\omega_{lq}\theta_{mr} + \omega_{kp}\theta_{lq}\theta_{mr} \\
&\quad +\theta_{mp}\omega_{lq}\theta_{kr} + \omega_{kp}\theta_{mq}\theta_{lr}]P_T{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ , \\
P_T(2^-)_{klmk'l'm'} &= [\theta_{kp}\theta_{lq}\theta_{mr} - \frac{1}{2}\theta_{km}\theta_{pr}\theta_{lq} - \frac{1}{2}\theta_{kp}\theta_{lm}\theta_{qr}]P_T{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ , \\
P_T(1^+)_{klmk'l'm'} &= \frac{1}{2}[\theta_{kp}\omega_{lq}\theta_{mr} + \omega_{kp}\theta_{lq}\theta_{mr} \\
&\quad -\theta_{mp}\omega_{lq}\theta_{kr} - \omega_{kp}\theta_{mq}\theta_{lr} + 2\theta_{kp}\theta_{lq}\omega_{mr}]P_T{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ , \\
P_T(1^-)_{klmk'l'm'} &= [\theta_{kp}\omega_{lq}\omega_{mr} + \omega_{kp}\theta_{lq}\omega_{mr} \\
&\quad +\frac{1}{2}\theta_{km}\theta_{pr}\theta_{lq} + \frac{1}{2}\theta_{kp}\omega_{lm}\theta_{qr}]P_T{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ , \\
P_V(1^-)_{klmk'l'm'} &= \frac{1}{3}(\eta_{lm}\theta_{k[k'}\eta_{l']m'} - \eta_{km}\theta_{l[k'}\eta_{l']m'}) \ , \\
P_V(0^+)_{klmk'l'm'} &= \frac{1}{3}(\eta_{lm}\omega_{k[k'}\eta_{l']m'} - \eta_{km}\omega_{l[k'}\eta_{l']m'}) \ , \\
P_A(1^+)_{klmk'l'm'} &= (\eta_{kp}\omega_{lq}\eta_{mr} + \omega_{kp}\eta_{lq}\eta_{mr} + \eta_{kp}\eta_{lq}\omega_{mr})P_A{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ , \\
P_A(0^-)_{klmk'l'm'} &= \theta_{kp}\theta_{lq}\theta_{mr}P_A{}^{pqr}{}_{k'l'm'} \ .
\end{aligned}\right. \tag{97}$$

$\theta_{kk'}, \omega_{kk'}$ は運動量空間において

$$\theta_{kk'} = \eta_{kk'} - \frac{k_k k_{k'}}{k^2} \ , \quad \omega_{kk'} = \frac{k_k k_{k'}}{k^2} \tag{98}$$

で定義されているものとする．(97) の演算子 $P_X(S^p)$，$P_Y(T^q)$ に対し，

$$P_X(S^p)P_Y(T^q) = \delta_{XY}\delta_{ST}\delta_{pq}P_X(S^p) \ , \tag{99}$$

が成立する．また，

$$\begin{aligned}
A &= [P_T + P_V + P_A]A \\
&= [P_T(2^+) + P_T(2^-) + P_T(1^+) + P_T(1^-) + P_V(1^-) + P_V(0^+) + P_A(1^+) + P_A(0^-)]A
\end{aligned} \tag{100}$$

を満たす．

場の方程式はこれらの演算子のみでは表すことが出来ないので，さらに演算子

$$\left\{\begin{aligned}
P_{12}(1^+)_{klmk'l'm'} &= \frac{3}{\sqrt{2}}P_T(1^+)_{klmpqr}\eta^{pp'}\eta^{qq'}\omega^{rr'}P_A(1^+)_{p'q'r'k'l'm'} \ , \\
P_{21}(1^+)_{klmk'l'm'} &= \frac{3}{\sqrt{2}}P_A(1^+)_{klmpqr}\eta^{pp'}\eta^{qq'}\omega^{rr'}P_T(1^+)_{p'q'r'k'l'm'} \ , \\
P_{12}(1^-)_{klmk'l'm'} &= -\sqrt{2}P_T(1^-)_{klmpqr}\omega^{pr}\eta^{qq'}\eta^{p'r'}P_V(1^-)_{p'q'r'k'l'm'} \ , \\
P_{21}(1^-)_{klmk'l'm'} &= -\sqrt{2}P_V(1^-)_{klmpqr}\eta^{pr}\eta^{qq'}\omega^{p'r'}P_T(1^-)_{p'q'r'k'l'm'}
\end{aligned}\right. \tag{101}$$

を導入する．これら 4 個の演算子と

$$P_{11}(1^+) = P_T(1^+) \ , P_{22}(1^+) = P_A(1^+) \ , P_{11}(1^-) = P_T(1^-) \ , P_{22}(1^-) = P_V(1^-) \tag{102}$$

に対して，

$$P_{ik}(1^\pm)P_{k'j}(1^\pm) = \delta_{kk'}P_{ij}(1^\pm) \tag{103}$$

という関係式が成立する．ただし，i, j, k, k' は 1, 2 を表す．

Lorentz ゲージ場のすべての質量項がない場合，即ち，$\alpha + 2a/3 = \beta - 2a/3 = \gamma + 3a/2 = 0$ が満たされている場合には，スピン射影演算子

$$\begin{cases} P_H(1^+) = \dfrac{1}{3}\{P_T(1^+) - \sqrt{2}P_{12}(1^+) - \sqrt{2}P_{21}(1^+) + 2P_A(1^+)\}\ , \\ P_H(1^-) = \dfrac{1}{3}\{P_T(1^-) + \sqrt{2}P_{12}(1^-) + \sqrt{2}P_{21}(1^-) + 2P_V(1^-)\}\ , \\ P_G(1^+) = \dfrac{1}{3}\{2P_T(1^+) + \sqrt{2}P_{12}(1^+) + \sqrt{2}P_{21}(1^+) + P_A(1^+)\}\ , \\ P_G(1^-) = \dfrac{1}{3}\{2P_T(1^-) - \sqrt{2}P_{12}(1^-) - \sqrt{2}P_{21}(1^-) + P_V(1^-)\} \end{cases} \tag{104}$$

を導入しておくと便利である．この場合の場の方程式はスピン射影演算子，$P_T(2^\pm)$，$P_H(1^\pm)$，$P_A(0^+)$，$P_V(0^-)$ で表すことが出来る．また, 新しいスピン射影演算子の組，$\{P_T(2^\pm)$，$P_H(1^\pm)$，$P_G(1^\pm)$，$P_A(0^+)$，$P_V(0^-)\}$ は完全である．つまり，

$$[P_T(2^+) + P_T(2^-) + P_H(1^+) + P_H(1^-) + P_G(1^+) + P_G(1^-) + P_A(0^+) + P_V(0^-)]A = A \tag{105}$$

を満たす．さらに，その要素 $P_X(S^p)$，$P_Y(T^q)$ は

$$P_X(S^p)P_Y(T^q) = \delta_{XY}\delta_{ST}\delta_{pq}P_X(S^p) \tag{106}$$

を満たす．このスピン射影演算子の組は Sezgin[4] のものと同じものである．

参考文献

1) K. Fukuma, Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 191.

2) S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, Prog. Theor. Phys. **66** (1981), 481.

3) D. E. Neville, Phys. Rev. **D18** (1978), 3535.

4) E. Sezgin, Phys. Rev. **D24** (1981), 1677.