詫間電波工業高等専門学校研究紀要 第 36 号 (2008)

電子流によるプラズマ振動発生と長時間予測の問題

森本　敏文*　　　森　　一郎**

Generation of Plasma Oscillation by Electron Flow and Problems of the Long Time Prediction

Toshifumi MORIMOTO and Ichiro MORI

Synopsis

Solution of the Navier-Stokes-Poisson system was analysed under condition of so called 'One component plasma-model' or the 'Jellium model' which was used the assumption that an ion rested and gave only as the positive background. The method of solving the system was discussed. We got finally the functional equation with respect to a potential voltage, $\Phi(\boldsymbol{\xi})$, where the variable, $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t$, meant the coordinate moved with wave velocity $\boldsymbol{v}$. It was found that the plasma oscillation started to increase when the negative potential gradient of the DC-based undulation appeared. We referred also to a limmit of the model by comparison with the experiments.

We compared the above theoretical results with that of the experiments. The experiments were performed by injecting a beam into plasma which was confined in the mirror magnetic field. Experimental results were partly fitted to the above theoretical results. As the different point, we pointed out the generation of ion waves and their strong coupling with the envelope solitary electron waves.

1. 緒論

気圧 10^{-4}Torr 程度の希薄なガス中に KeV 程度のエネルギーを持った電子ビームを通過させた場合，ビーム電子とガス (例えば Ar) 分子との衝突の平均自由行程は数 m に及び，実験装置の長さ (1m 程度) の場合、ビームは衝突を起こさず集電極に激突するはずである。実際にはこの様な事は起きず，ビームはエネルギーを失う一方、内部のガスはほぼ完全に電離する。現象を従来からの二体衝突に基ずく放電モデルでは説明出来ず，遠距離衝突または多体衝突 (その手始めとしての三体衝突) が主体的である事が説明できる [1),2)]。即ち，ビーム中の一つの電子 (速度 $\boldsymbol{v}$) が準粒子 Phonon$(-\omega_1, -\boldsymbol{k}_1)$ をイオンに送ると、イオンが他のビーム電子 ($\boldsymbol{v}$') に Phonon$(\omega_1, \boldsymbol{k}_1)$ を送り返すという電子二個とイオンとの三体衝突である。解析では、どの場所でも同じ事が起きると考え波動の空間的な伝播形態等は特に議論せず簡単化して来た。空間的な伝播形態は海の波動や流体力学では Navier-Stokes の式で表される。ここで、電気的性質を議論するため，Poisson の式を連立させて解析する事を試みた。造船工学や流体力学の方面に於いては Navier-Stokes の式は解析解は得られず，数値解析によってのみ解が得られるとされる。我々は，何らの近似も用いず電位 $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\xi}$ は流れに乗った座標中心点 $\boldsymbol{\xi}=0$ からの位置のずれ) に関する解析解として汎関数方程式を導出したが，具体的波形を求める際には汎関数方程式を満たす事を条件に初期関数を与える必要がある。電荷を持たない粒子 (分子) からなる通常の波は電界に影響されないため比較的に容易に解析できると考えられるが，電荷を持つ粒子の流体では Poisson の式との連立によって，より厳しい解析となる事が予想される。

さて，イオンは質量が大きく静止しているとし，その電荷は空間的に平等な背景を為すとするプラズマ工学で常識的な，所謂，一成分プラズマ (One Component Plasma (OCP), or 物性工学で馴染みの Jellium Model) をここでは想定する。この考えは実験結果と比較して相入れない事がわかる。それ故，上記の半導体工学等で用いられるモデルは非線形の世界では大きい修正が必要になる。実際にはイオンは揺り動かされ，Plasma 振動は連波ではなく，波束 (Soliton) となって現れる事が明らかになる。

* 情報通信工学科，　** 徳島大学名誉教授

2. Navier-Stokes-Poisson 系

2.1 基礎方程式

ここではまず，電子の質量を m(kg)，密度を $n(m^{-3})$，電荷量を $-q = -|e| < 0$(C)，速度を $\boldsymbol{v}$(m/s)，現在位置を $\boldsymbol{x}$(m) の場所にあるとし，その場所の電位を φ(V)，真空の誘電率を ε_0(F/m)，イオンの密度を $n_i(m^{-3})$ とする。電子に対する連続の方程式は次のようになる:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

次に流れの運動方程式 (Navier-Stokes) は次の式で表される:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{q}{m}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \tag{2}$$

また Poisson の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \boldsymbol{x}^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0}(n_i - n) = \frac{q}{\varepsilon_0}(n - n_i) \tag{3}$$

2.2 変数の変換

以後は流体力学の方面の取り扱いに従って波動の伝播方向 (電子の流れの方向) の空間一次元を仮定し，波動に乗った位置座標系 ξ を用いて式の簡単化を行う。

$$\xi = x - ut, \quad u = const. \tag{4}$$

そして変数 x, t から ξ に変換する。ここで u は流れの速度である。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{\partial n}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot (nv) = \frac{\partial}{\partial \xi}(nv) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}(nv)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}$$

そこで (1) 式は次の様になる：

$$-u\frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(nv) = 0 \tag{1'}$$

(2) 式は次の様に書かれる：

$$-u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tag{2'}$$

また (3) 式は次の様になる：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}(n - n_i) \tag{3'}$$

2.3 方程式の積分

まず上記 (1') 式から次の結果が得られる。

$$n(v - u) = Const. \tag{5}$$

更に (2') 式より以下の式が得られる。

$$-u\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \xi} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tag{6}$$

(6) 式の両辺に質量 m (m=一定) を両辺に乗じると以下の式が得られる。

$$-mu\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2}m \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \xi} = -q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \tag{7}$$

従って，粒子のハミルト二アン, H, は,
次の様になる：

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi = muv \tag{8}$$

(8) 式から (9) 式 が得られる。

$$\frac{1}{2}mv^2 - muv + q\varphi = 0 \tag{9}$$

そこで，二次方程式 (9) を v に関して解く。

$$v = \frac{mu \pm \sqrt{(-mu)^2 - 4 \cdot (\frac{1}{2}m) \cdot q\varphi}}{m}$$

$$= u \pm \sqrt{u^2 - \left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}, \tag{10}$$

その結果，次式がえられる。

$$v - u = \pm\sqrt{u^2 - \left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}.$$

(10) 式の意味する事は平均流速度 u と電子の実際の速度 v との差 $v - u$ は，その場所の電位 φ に依存する事を示す。もし (10) 式を (8) 式に代入すれば，Hamiltonian H は次の様になる。

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi = muv$$

$$= mu\left\{u \pm \sqrt{u^2 - \left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}$$

一方、(5) 式から， $n = Const./(v - u)$
となり，従って次の様になる。

$$n = \pm\frac{Const.}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}} \tag{11}$$

電位 φ の高まりによって電子の速度 v が (10) 式により大きくなると，連続の式 (5) 式から電子密度 n が小さくなる事がわかる。ところが，電位は Poisson の式によって密度 n が関係して決まる。Poisson の式 (3') に対しては次の式が得られる。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2=\frac{q}{\varepsilon_0}(n-n_i)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{12}$$

(11) 式を (12) 式に代入して (13) 式を得，従って $n_i = Constant$ として φ を求める為の式として，(14) 式を得る。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\left\{\pm\frac{Const.}{\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}}-n_i\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \left[\pm2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)\left\{\int\frac{Const.d\varphi}{\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}}\mp\int n_i d\varphi\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

さて我々は変数 u を Hamiltonian H に置き換える事を試みる。
まず (14) 式の積分計算を行う。

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}} = \left(\frac{m}{q}\right)\cdot\left\{u-\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\} \tag{15}$$

そこで (14) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=i\sqrt{2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)n_i}\cdot\left[\varphi-\frac{Const.}{n_i}\left(\frac{m}{q}\right)\cdot\left\{u-\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

ここで，u から H へ変換を行う。

$$H=mu\left\{u\pm\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}$$

$$u=\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}} \tag{17}$$

それ故

$$\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi} = \sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi} \tag{18}$$

(18) 式を用いて (16) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=i\sqrt{2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)n_i}\cdot f(\varphi),\quad where\quad f(\varphi)= \left\{\varphi-\frac{Const.}{n_i}\left(\frac{m}{q}\right)\left(\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}} -\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

結局，$\varphi(\xi)$ に関する解は次の逆関数で与えられる：

$$\int\frac{d\varphi}{f(\varphi)}=i\sqrt{2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)n_i}\cdot\xi \tag{20}$$

2.4 位相面に於ける解析

(16) 式で，$\partial\varphi/\partial\xi$ を量 u で表現した。また同じ量を Hamiltonian H で表した (19) 式に於いて，電位 $\varphi=0$ の場合に右辺が零になる事は容易にわかる。一方，電子の $\partial\varphi/\partial\xi$ と電位 φ との関係を表す位相面に於ける粒子軌道を表せば理解できる事であるが，φ の大きな所で (16) 式や (19) 式の右辺が再び零になる。この最大の φ を φ_{max} とすると，φ_{max} の Volt 数を決める事と，$Const.$ の値を決める事は同じ事である。$Const.$ の関係する連続の式は (1), (5)，及び (11) 式である。式から $Const.=n_0v_0$ (電子の初期の Flux) と書く事にする。n_0 は電位 $\varphi=0$ の場所 (電子注入前の) の密度で，v_0 は初期速度である。加速電圧を加減して，入射速度 $\boldsymbol{v}_0$ の大きさを調整し、

$$H=(1/2)m\boldsymbol{v}_0^2=(1/2)mv^2+q\varphi=muv \tag{8}$$

に従って H や v、u を大きくすれば φ_{max} の値を大きくできる。また Plasma の中性条件から $n_0=n_i$ と考えられる。電位 φ の存在下の密 度 n と n_i とは異なるが，(16)，(19) 式は中性条件を表す。

これらの式は所謂 *Ill-posed* になっている事が容易に分かり，これが解析に大きい困難を持ち込む。つまり、Root を含んだ極めて大きい量の差としての微小量が電位を作る事を意味する。そこで、$\varphi=0$ 及び $\varphi=\varphi_{\max}$ 付近に於いて激しく桁落ちする。

また実験によれば $n_i=const$ ではなく，実際は n_i は場所及び時間の関数で、イオン振動が発生する。しかし，この解析では、*One Component Plasma* を仮定しており，多少の矛盾も生じる。これが‘長時間予測の問題’を提起する。そこで，$Const.=n_0 v_0$ の値付近に於いて，(16)，(19) 式の φ を φ_{max} と置いて (16) 式や (19) 式の右辺の値が零になる様に $Const.$ を決める事にする。また，*Ill-posed* を $\varphi=0$ 付近に於いて展開 (解析接続) し *Well posed* に変える事もここでは行った。第 1 図は横軸に φ 縦軸にそのマイナス勾配をとった位相面を示す。$\boldsymbol{v}_0$ は加速電圧 1920(V) のビーム速度の場合で，半分の速度 $0.5\boldsymbol{v}_0$ では、最大電圧またはエネルギーは 4 分の 1 になる事も理解できる。さて，(19) 式の $\{\cdots\}$ の内部にマイナスを付けた量，

$$Const.\left(\frac{m}{2q}\right)\left(\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right)-n_i\varphi$$

は φ が零から或る値迄の区間では負の値になり，その φ の領域が第 1 図の Circle の区間に相当しており，$\varphi(\xi)$ が振動解を与える区間になる。第 1 図には φ が負になる領域は書いていないが、図の左側に φ が負になる領域が存在し、従って図形は 8 の字型になり，8 の字を一周する電位の一サイクルに対して電界 $E=-d\varphi/d\xi$ は 2 回プラスとマイナスを繰り返す。即ち、電位が上昇から下降に転じる際，及び下降から上昇に転じる際に反転する。

2.5 電位 $\varphi(\xi)$ に関する式の導出

ここでは (16) 式を更に積分して，電位 $\varphi(\xi)$ の具体的式な形を求める方法を示す。
まず (16) 式を次のように書き換える。

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi-\frac{Const.}{n_i}\left(\frac{m}{q}\right)\left\{u-\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}}}=i\sqrt{2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)}n_i\cdot\xi \qquad (16')$$

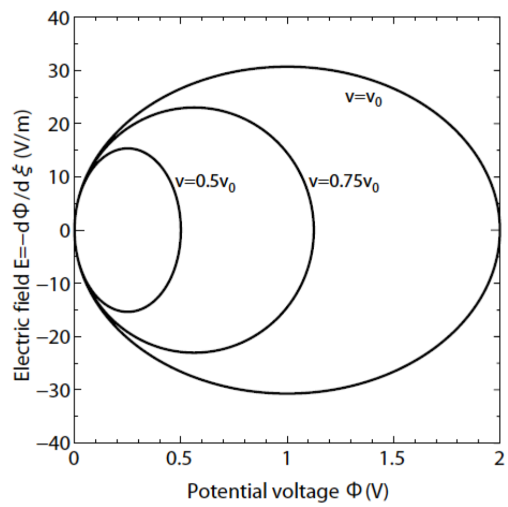


Fig. 1. Phase diagram of the electric field $E=-d\varphi/d\xi$ vs. potential voltage φ is represented. The incident velocity $\boldsymbol{v}_0=2.56\times10^7$(m/s) is used, which corresponds to the energy of 1920(eV), while the densities $n_0=n_i=10^{14}$(m^{-3}) are assumed.

ここで，$\sqrt{u^2-(2q/m)\varphi}=t$ と置いて 変数を φ から t に変換すると，(16’) 式は次の積分によって表される。

$$\sqrt{\frac{2m}{q}}\int\frac{i\cdot t dt}{\sqrt{t^2-2\left(\frac{Const.}{n_i}\right)t+\left(\frac{2Const.}{n_i}u-u^2\right)}}=i\sqrt{2\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)}n_i\cdot\xi \qquad (21)$$

(21) 式に対応し $a>0$ の場合の積分公式 :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|$$

を用いる。但し，a, b, c は定数，x は変数とする。その後、$t=\sqrt{u^2-(2q/m)\varphi}$, $t^2=u^2-(2q/m)\varphi$ に依り φ に再び戻す。

$$\left[\left(\frac{2Const.}{n_i}\right)u-\left(\frac{2Const.}{n_i}\right)\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{Const.}{n_i}\right)ln\left|\left\{\left(\frac{Const.}{n_i}\right)-\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{2Const.}{n_i}\right)u-\left(\frac{2Const.}{n_i}\right)\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi\right]^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$+\left(\frac{Const.}{n_i}\right)ln(v_0)=-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\cdot\xi \tag{22}$$

左辺の $(\frac{Const.}{n_i})ln(v_0)$ は任意の積分定数に対応する項であるが，v_0 は電子ビームの初期の入射速度を当てている。また連続の式 (1)、(5)、及び (11) 式から $Const.=n_0v_0$ (電子の初期の Flux) であり，更にプラズマの中性条件から $n_0=n_i$ であるから，$Const./n_i=v_0$ となる。結局 (22) 式は次のように書ける。

$$\left[\left\{1-\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{u^2-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}-\left(\frac{1}{v_0}\right)\left\{2v_0\left(u-\sqrt{u^2-\frac{2q}{m}\varphi}\right)-\frac{2q}{m}\varphi\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$=\exp\left\{\left(\frac{1}{v_0}\right)\left[2v_0\left(u-\sqrt{u^2-\frac{2q}{m}\varphi}\right)-\frac{2q}{m}\varphi\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\cdot\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\cdot\xi\right\} \tag{23}$$

これが電位関数 $\varphi(\xi)$ が満たすべき解析的な式である。

この式に於いて，指数関数内部の root 内は $\varphi(\xi)$ の大きさによって正と負の値をとる。負の値の場合は関数は振動解となる。また (23) 式の最後の factor は $\sqrt{n_iq^2/m\varepsilon_0}$ が $n_i=n_e$ で電子振動の角周波数であり，$\boldsymbol{\xi}>0$ の領域では，プラズマ振動が Landau- 減衰により減衰し，逆に $\boldsymbol{\xi}<0$ の領域では発振が増大する事を示す。

さてここで (17) 式及び (18) 式の関係式に従って u から H に変換する。

$$\left[\left\{1-\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right]^{-1}$$

$$=\exp\left[\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right]\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\cdot\xi\right\} \tag{24}$$

さて $\exp\left[\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right]$ なる

因子は　$0<\varphi<\varphi_{max}$ (φ_{max} は '2.4 節 位相面に於ける解析' を参照) の範囲で ROOT の内部が負になる。その理由は φ が小さい場合は $\sqrt{\{H^2/2m(H-q\varphi)\}-(2q/m)\varphi}$ が $H/\sqrt{2m(H-q\varphi)}$ に接近し、$-(\frac{2q}{m})\varphi$ も存在するからである。そこで ROOT 内にマイナス符号，ROOT 外に虚数単位 i を付すと，振動解を得る。

即ち，　$X\equiv\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi-2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}}$

とすれば，上記 因子は

$$\exp(iX)=cos(X)+i{\cdot}sin(X)$$

と書けるからである。また (24) 式に於ける

$$\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\cdot\xi\right\}$$

なる因子は，$\omega_{pe}\equiv\sqrt{n_iq^2/(m\varepsilon_0)}$ がプラズマ電子振動の角周波数であるから，プラズマ電子振動 ($\varphi(\xi)$ の振動) が ξ の増加と共に ‘Landau-減衰’ する事を表す。この減衰の程度は，$\omega_{pe}\simeq2.5\times10^9$(rad/s), $v_0\simeq2.5\times10^7$(m/s) の程度であるから ξ=0.01(m) 程度の距離で (1/e) に減衰し，逆に流れに乗った座標原点 ξ=0 から ξ の少ない方に -0.01(m) 離れた位置 $\xi=-0.01$(m) の場所では e-倍 に増大する。

ところで，(4) 式に示す様に実験室系の位置を x とすれば，$\xi=x-ut$, $(u\simeq v_0)$ であり，x なる位置で固定して観測すれば，ξ の増加は時刻 t の増加と逆方向に進む。(ξ の増加に対して時刻 t を減らさなければ x を一定に保てない) 結局，振幅は時刻と共に非線形過程が自動的に制限するまで増大する。
自動的制限の存在は線形及び準線形理論の結果と対照的であり，非線形理論の賜物といえる。
また上記の $u\simeq v_0$ にも注意する必要がある。これまで，u=v_0 (初期のビーム速度) と考えて来たが，これは無負荷の所謂，シグナル速度である。しかし，振幅が増大して来ると，高周波の Power は急激に増大する。Power は電子ビームの運動エネルギーから得ているからビーム速度は急激に減少する。流体力学でよく使われる (4) 式の $u=const.$ や (5) 式などの理論の取り扱いの根幹をなす考え (波動伝播速度に乗った座標系を考えて簡単化する方法) は負荷の急激な増大に対してはその信憑性が揺らいで来る。

更に，高周波波動は準粒子 ‘Plasmon’ または ‘Phonon’ からなるが，電子及び準粒子の質量が軽いために相互の変換の反応は速く起きる。勿論，電子のエネルギーと高周波のエネルギーの和は保存される。従ってこのままではイオン (Plasma) にはエネルギーは移らないが，実験に於いては容易に移る。量子力学を含め多くの Hamilton-系の理論は無負荷の場合を扱っている。もしイオンに渡る損失がある場合は，Hamiltonian に含める必要がある。

一般に損失がある場合の非線形理論では，第 1 図に示す様な位相平面に於ける軌道は閉じないで位相面内の軌道は，その半径が減少しながら回転し，所謂，アトラクターと呼ばれるカオス的な軌道に急激に引き込まれて行く。

さて，後の第 3 図に示す急激に振幅が増大する解では ξ=0.2306 から ξ=0.2403 迄の区間差 $\Delta\xi$=0.01 の区間に電子振動は 12 周期振動し，振動振幅は 9.5 倍に増幅しているのがわかる。この様に急激な増幅が起きる場合には強力な電界 $\boldsymbol{E}=-grad\varphi$ によってイオンが揺り動かされるのが常である。もし実験に於ける様に Ar-ガス を用いた場合には Ar の原子量は 39.944 と，イオン密度，例えば 2.5×10^{15} を用いれば，イオン振動の角周波数 ω_{Ar}=ω_i=9.276×10^6(rad/s) (1.477MHz) となり，その半周期 $T_i/2$=3.39×10^{-7}(s) の期間に電子振動は約 135 回振動する。実験に於いて発生する包絡孤立波 (Soliton) の時間幅はイオン振動の半周期程度 (またはその半分) を目途とすると考えて良い。つまり，電子振動はイオン振動にエネルギーを取られてやがて収束し，そのため長く続く連波ではなく，孤立波になる。

さて再び (24) 式に戻る。(24) 式は電位 φ が満たすべき式であり，微分された量を残さない表式である。しかし，この関係式は電位に関して複雑な構造を形成し，これを φ について解く事も容易でない。更に前述の様に，$\varphi=0$ 付近と，$\varphi=\varphi_{max}$ 付近の値をとる場合には，二つの大きな量の ROOT の差が極めて小さい量であり，これが電位を励起するため計算が激しく桁落ちすると云う意味で，*Ill-posed* の表示である。

この様な問題点は，プラズマのプローブを用いた静電気的研究やプラズマの鞘を解析する場合など，$Poisson$ の式を用いる場合は常時起き得る事柄である。これを *Well-posed* に直すためには大きい二つの量を前もって引き算で引き去り，電位を励起するのに中心的な役割を果たす微妙な量のみ残す様に関数を解析接続する必要がある。ここでは以後，$\varphi=0$ 付近での取り扱いのため，$(q\varphi/H)$ を微小量として級数展開を行う手法を用いる。

展開の基本は : $(1\pm x)^m = 1\pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots for \ \ (|x|<1).$

である。従って、(24) 式の 1 行目から 2 行目に渡る，次に示す項 :

$$\left[\left\{1-\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right]^{-1}$$

すなわち，$[\{1-(1/v_0)\sqrt{\cdots 1}\}-(1/v_0)\sqrt{\cdots 2}]^{-1}$ なる形は $\simeq 1+(1/v_0)\sqrt{\cdots 1}\}+(1/v_0)\sqrt{\cdots 2}$ と書ける。(展開で $m=-1$ にとれば良い。) また $(1/v_0)\sqrt{\cdots 1}$ の部分は次の様になる。

$$\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}=\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\frac{H}{2m}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{4q\varphi(H-q\varphi)}{H^2}}}{\sqrt{1-\frac{q\varphi}{H}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{H}{2m}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)+\cdots\right\}\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4q\varphi(H-q\varphi)}{H^2}+\cdots\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{H}{2m}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)+\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2+\cdots\right\} \tag{25}$$

$$\text{また、}\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}=\sqrt{\frac{H}{2m}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\frac{4q\varphi(H-q\varphi)}{H^2}}}{\sqrt{1-\frac{q\varphi}{H}}}=$$

$$\sqrt{\frac{H}{2m}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2-\frac{5}{16}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+\cdots\right\}\left\{2\left(\frac{q\varphi}{H}\right)-4\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+2\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2H}{m}}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)-\frac{13}{8}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2+\frac{11}{16}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+\cdots\right\} \tag{26}$$

一方、上記 $(1/v_0)\sqrt{\cdots 2}$ の部分は前頁に於ける X の定義によれば iX である。また X が小さい場合には $sin(iX)\simeq iX$ となるから、iX と $i{\cdot}sin(X)$ は打ち消す事になる。そこで (25) 式の展開第 2 項まで用いる事にすれば、(24) 式は次の様に書ける。

$$\sqrt{\frac{H}{2m}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)\right\}+iX=\{cos(X)+i{\cdot}sin(X)\}{\cdot}\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right){\cdot}\xi\right\} \tag{24$'$}$$

結局、電位の振動解 $q\varphi/H$ は次のように求まる。

$$\left(\frac{q\varphi}{H}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left[1-\sqrt{\frac{2m}{H}}v_0{\cdot}cos(X){\cdot}\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right){\cdot}\xi\right\}\right],\quad where\ : \tag{24”}$$

$$X\equiv\left(\frac{1}{v_0}\right)\sqrt{\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi-2v_0\left\{\frac{H}{\sqrt{2m(H-q\varphi)}}-\sqrt{\frac{H^2}{2m(H-q\varphi)}-\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}\right\}}$$

$$\simeq\sqrt{\left(\frac{2q}{m}\right)\varphi}{\cdot}\left(\frac{1}{v_0}\right)\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{H}}v_0\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)-\frac{13}{8}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2+\frac{11}{16}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+\cdots\right\}\right] \tag{27}$$

但し、(27) 式の X は電位 φ を含むから、これに $cos(X)$ を代入するものとする。すると、$cosine$-関数の中に $\sqrt{cosine\ function}$ が入る独特の形が生じる。そこで電位関数の曲線を描くため上記の展開を用いて、より具体的に解を得る事を試みる。

前頁の (27) 式の先頭の部分の因子，$\sqrt{2q\varphi/m}$ は $\sqrt{q\varphi/H}\cdot\sqrt{2H/m}$ となるが，$H=(1/2)mv_0^2$ であるから，$\sqrt{2H/m}=v_0$ となる。また $(1/2)\sqrt{m/H}\cdot v_0=1$ となるから結局 (27) 式は次の様に書ける。

$$X=\sqrt{\frac{q\varphi}{H}}\left[1-\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)-\frac{13}{8}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2+\frac{11}{16}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+\cdots\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\varphi}{H}}\left\{-\left(\frac{q\varphi}{H}\right)+\frac{13}{4}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^2-\frac{11}{8}\left(\frac{q\varphi}{H}\right)^3+\cdots\right\} \tag{28}$$

この式に於いては大きい量である二つの 1 が互いに相殺し，(28) 式の 2 行目では，小さい量のみで X を表す事ができ，*Ill-posed* が *Well-posed* に変化した事を示す。また $\sqrt{2m/H}\cdot v_0=2$ となる事から，前頁の (24") 式，つまり，最終的に求めるべき量 $(q\varphi/H)$ は次の式から求められる。

$$\left(\frac{q\varphi}{H}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left[1-2\cdot cos(X)\cdot\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\cdot\xi\right\}\right] \tag{29}$$

さて，$(q\varphi/H)$ を求めるには (28) 式から X を求め，(29) 式に代入する事になる。ところが，(28) 式の右辺は $(q\varphi/H)$ の関数になっている。ここでは，出来上がった連立超越方程式 (28)、(29) 式を以下に述べる方法で解く事にする。これまで述べた経緯から，$\varphi(\xi)$ の変動の第一近似を $\varphi_0\cdot cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})$ とする。φ_0 は ξ の関数ではあるが、変動しないか或いは変動してもゆっくりと考える。ここで，$\boldsymbol{\xi}$ は流れに乗った座標で，単位は (m) であり，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル (単に波数とも呼ぶ) で単位は (rad/m) である。

本来ならば角周波数 (以後，プラズマ工学に従って周波数と呼ぶ) ω と波数 $\boldsymbol{k}$ との関係，即ち '分散式' に付いてこれ迄に述べておく必要があるが，電子ビームを通すためには僅かながらビーム方向に磁界 (10^{-2}T: テスラ=100Gauss) を加えている。すると，実際には高域混成波が発生し，これと電子ビームの分散式の交点の周波数と波数で発振が起きる。ビームの分散式は $\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\Sigma_\alpha=0$ (後に 13 頁付近で述べる。) より $\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+Im\Sigma_\alpha$ であり，$Im\Sigma_\alpha$ を考えなければ $\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ である。(29) 式の指数関数の中身は $\{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}\}$ であり，$|\boldsymbol{k}|=\omega_{pe}/v_0=\sqrt{n_iq^2/(m\varepsilon_0)}\cdot(1/v_0)$，数値的には，$n_i=2\times10^{15}$ (m^{-3}) とすれば，$\sqrt{n_iq^2/(m\varepsilon_0)}\simeq2.5\times10^9(rad/m)$，$v_0\simeq2.5\times10^7(m/s)$，$k\simeq100(rad/m)$ の程度である。なお，上記 Σ_α は自己エネルギー項である。
ここではまた，全体として一次元を考えて来たが，拡張は可能である。一次元の場合の X は次の様になる。

$$X=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\varphi_0}{H}}\cdot\sqrt{cos(k\xi)}\left\{-\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)cos(k\xi)+\frac{13}{4}\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)^2cos^2(k\xi)\right.$$
$$\left.-\frac{11}{8}\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)^3cos^3(k\xi)+\cdots\right\} \tag{30}$$

これを階差の逐次近似で以下の様に計算を進める。

$$X_{(I-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)_{(I-1)}}\cdot\sqrt{cos(k\xi_{(I-1)})}\left\{-\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)_{(I-1)}\cdot cos(k\xi_{(I-1)})\right.$$
$$+\frac{13}{4}\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)^2_{(I-1)}\cdot cos^2(k\xi_{(I-1)})$$
$$\left.-\frac{11}{8}\left(\frac{q\varphi_0}{H}\right)^3_{(I-1)}\cdot cos^3(k\xi_{(I-1)})+\cdots\right\} \tag{31}$$

この $X_{(I-1)}$ を (29') 式に代入し $(q\varphi/H)_{(I)}$ を求め，それを用いて (31) 式より $X_{(I)}$ を計算し，$\xi_{(0)},\xi_{(1)},\xi_{(3)}\cdots$ と微小間隔 $d\xi$ の刻みで各場所の $q\varphi(\xi)/H$ の値を逐次計算する。

$$\left(\frac{q\varphi}{H}\right)_{(I)}=\left(\frac{2}{3}\right)\left[1-2\cdot cos(X_{(I-1)})\cdot\exp\left\{-\sqrt{\frac{n_iq^2}{m\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{v_0}\right)\cdot\xi_{(I-1)}\right\}\right] \tag{29'}$$

3. 電位の解とその特徴

3.1 電位の解

初期値 $\varphi_{(0)}=cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{k}=2\pi/\lambda$, (λ:波長), $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t\simeq x\text{-}v_0 t$ から出発した解 $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ の例を第 2 図に示す。$\boldsymbol{\xi}$ は波動と共に移動する (平均流速または平均流れ速度と呼ぶ) 位置座標の原点 $\boldsymbol{\xi}=0$ を基準に，平均流より先に伝わる部分 $\boldsymbol{\xi}>0$ と遅れて伝わる部分 $\boldsymbol{\xi}<0$ の部分に分けられる。

波動振幅は $\boldsymbol{\xi}<0$ に於いて大きく、$\boldsymbol{\xi}>0$ の領域で収斂している。その理由は前者に於いては平均流速 $u\simeq v_0$ より遅い遅波 (Slow space charge wave) (SSCW) は負のエネルギーを運ぶとされ、損失によって負のエネルギーが益々増加する (振幅が増加する) に対し，平均流より速い速波 (Fast space charge wave)(FSCW) は正のエネルギーを運ぶとされ，エネルギー損失により即減衰するからである。

第 2 図の解は $\xi=-0.01034038$(m) を初期座標とし，(31) 式の逐次近似式に従って計算を進め、最初の電位 (規格化した無次元表示 $q\phi(\xi)/H$ で電位を表示することとして)，(31) 式の右辺に於いて

$$\{q\varphi_{(0)}(\xi=-0.01034038)/H\}_{(I-1)}=cos(k\xi)_{(I-1)}$$
$$=cos\{k\times(-0.01034038)\},$$
$$k=(\omega_0/v_0)=96.7083(\mathrm{rad/m}),$$

から出発し，(31) 式の左辺 $X_{(I-1)}$ を得て，これを (31) 式の下に示す (29') の右辺に代入して，新しい $(q\varphi/H)_{(I)}$ を得るといった操作を ξ の微小間隔：言い換えると $\xi_{(I)}$ と $\xi_{(I-1)}$ の間隔，$d\xi=5.17\times10^{-6}$ の刻みで次第に大きい ξ の値に於ける $q\varphi(\xi)/H$ を求め，最終は $\xi=+0.01034038$ 迄 4000 点を曲線で繋いだ計算結果である。

第 2 図の $\xi<0$ において、間欠振動など極めて乱流的様相が見られ、初期座標から僅か離れた座標でも電位が大きく変動している。この事から、どの位置のどんな振幅値から出発して計算を進めても $\xi>0$ の座標に至ると電位が次第に収斂して行く事になると推測できる。ところで，$\xi=x-ut\simeq x-v_0t$ であるから $x=constant$ の位置では時間 $t=0$ での ξ-値は大きい所にあり、$t=0<t_1<t_2<t_3\cdots$ の時刻に対して $\xi(1)>\xi(2)>\xi(3)\cdots$ と時刻と共に ξ の小さい座標に移動する事がわかり、時刻はこれまで述べて来た様に右から左に経過する。また時刻と共に位相と振幅の変動は大きくなり，流れは強い乱流になる事がわかる。

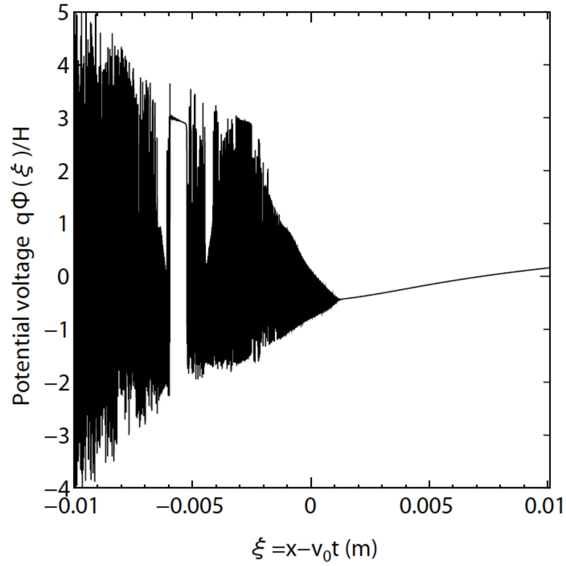


Fig.2 Solution of the eq.(29) by using the italation method, eq.(31), with an initial value $\varphi_{(0)}=cos(k\xi)$ from the start of $\xi=-0.01034038$ to that of the end $+0.01034038$, where $k=(\omega_0/v_0)=96.7083$(rad/m), the plasma frequency $\omega_0=2\pi\times400$(MHz),the beam velocity $v_0=2.59882\times10^7$(m/s)(energy of 1920eV) are used.

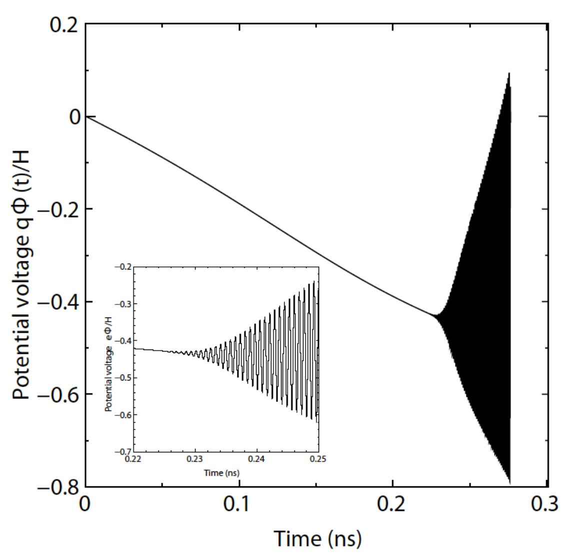


Fig.3 Creation of the nonlinear plasma oscillation is shown. The calculating condition is the same as in fig.2. When the potential goes downward to negative, the oscillation begins since the beam speed lessens to approach to the space-charge-limmited flow by deepening potential. In the experiment, carrier of the envelope soliton starts to increase at also negative phase which is created by surrounding ion wave.

3.2 非線形プラズマ振動とその開始条件及び実験の場合との比較

第3図は波動の伝播に乗った座標原点即ち ξ=0 (m) より更に流れの前方の位置 ξ=+0.007176222(m) を考え，この位置を x_0 とし，位置 x_0 に固定して観測する事とし，プラズマ振動を時刻 t=0(s) から $t_1=x_0/v_0$=0.2763328(ns) まで観測した結果である。この t=0 は，まだ本格的波動が到着していない時刻の時間原点である。電子ビームの速度 $v_0=2.59882\times10^7$(m/s) 及び 波数 $k=(\omega_0/v_0)= 2\pi/\lambda$=96.7083(rad/m)，すなわち，波長を λ=0.06497(m) として計算を進めた。

注目すべきは，ゆっくりと下がる電位に続いて上記時間原点より 0.22(ns) 経過した時刻付近に達すると振動が発振を始めることである。この負の方向に沈む電位での発振開始現象は実験で観測された結果と良く一致する。実験の場合にはプラズマ振動は包絡線が $sech(x)$-型をした半値幅 0.5μs 程度の孤立波の中に搬送周波数 (400MHz 程度) が入った包絡孤立波 (Envelope solitary wave) となって現れるが，搬送波の位相と比較して極めてゆっくりと時間変化するイオン波の電位が時間的に負の半サイクルに向かって下がり行く場合に限り，搬送波の振動が時間的に立ち上がる。その場合，イオン波は正弦波とは限らず，イオン衝撃波の場合が多い。これらは所謂 Korteweg de Vries-方程式を満たす事で知られている。例えば，電子ビーム上の孤立した窪みは高周波 (包絡 Soliton) の圧力によって排除されたビーム波形としてしばしば現れるが，その部分は電子密度の不足のため，正電位となり，イオン波リトンとも呼ばれる。このイオン波ソリトンは振幅の大きいものが速く伝播するため，大きいものから順番に並んだ連波 (衝撃波) となって現れる。結局実験に於いては，これらのイオン波に於いて振幅が大きく，負の場所勾配の大きい部分で発振が立ち上がることがわかる。

電位のマイナス勾配 (電界) の大きい所での発振開始は，電子の流れの減速による空間電荷制限流の領域に近ずくためと考えられる。一般に電子電流密度 $\boldsymbol{i} = ne\boldsymbol{v}$ の増加のためには，第1に，加速電圧を大きくして v(m/s) を大きくする方法，第2に熱電子放出を多くして電子密度 $n(\mathrm{m}^{-3})$ を増加させる方法があるが，発振には後者が極めて重要である。但し，荷電粒子密度の大きい電子ビームを作るには電子銃の設計とそれに繋がる電子レンズの設計が困難を極める事となる。[3),4)]

4. 長期予測の問題

4.1 長期予測の二つの問題点

解の長期予測には二つの問題点がある。第1は非線形系自身が予測困難をもたらす事と，第2は，我々の今回の解法が未来の状態を知ってはじめて現在が計算できる方法である事に依る。

まず，第1の問題点を考える。一般に線形微分方程式の解は例えば初期値または近似値を与えると以後の経緯は一通りに決まり，その初期値に極めて近い値から出発すれば，解も前者に対応して近くに決まる。しかし，非線形系では僅か値の異なる二つの初期値から出発しても，二つの解は時間が経過すれば全く異なる経緯を辿る。従って長時間後の状態を予測する事は極めて困難である。

この第1の端的な例として，気象予報で利用されている Super-computer による数値予報では，地球の空気層を何層にも分け，各層で非線形方程式を解いて層間で接続する方法をとる。僅かな初期値が異なるのみで将来の時間に対する結果が大きく異なる。最近では，わざと異なる多数の初期値を与え，結果を平均して答えを得る方法を用いている。

次に第2の問題点について考察する。一般に非線形理論では，(24),(28),(29) 式などから理解できる様に電位 $\varphi(\xi)$ の汎関数の式が決まるのみであり，従って具体的な ξ の関数が決まる訳ではない。即ち，$\varphi(\xi)$ を求めるために $\varphi(\xi)$ が分からないといけない。但し，これらの式では積分過程は終了しているため微分方程式を解く必要はないが，式が超越方程式であり，極めて困難になっている。

更に我々は初期値を推測できない事がある。第2図の場合には時間は右から左方向に移動する。我々は $q\varphi(\xi)/H$ を左端から右に向かって逐次近似で解いたが，左端の初期関数を $cos(k\xi)$ で近似して出発した。つまり予測困難な未来の関数形を与えて解き始め現在を計算した事になる。初期関数を与えた直後，大きい振幅が突然始まり，それが過去の領域 $(\xi > 0)$ に達する頃には振幅が減少して来ると共に時間的にゆっくり変化する成分 (Coherent な成分) が増加する。これは $\xi < 0$ に存在する乱流状態を経由し，乱流情報の加味が進み平均化される事で $\xi > 0$ に達する頃には Coherent な成分に同化されるものと考えられる。この際，複雑な変動を平均化して忘れさせる因子: $exp\{-\sqrt{n_i q^2/(m\varepsilon_0)}(1/v_0)\xi\}$ の存在が極めて大きい役割を演ずる事がわかる。

4.2 非線形に於ける'輪廻転生'の可能性

是まで述べた計算法，即ち未来の初期関数を与えて現在及び過去の状態を求める方法では，$\xi < 0$ に存在する乱流状態 (Spector が拡がった状態) を経由する。その後乱流情報の加味が進み平均化される事で $\xi > 0$ に達する頃には時間的にゆっくり変化する成分が増加し Coherent な成分に同化される。この時，総ての波動は Landau-減衰する事を示す因子: $exp\{-\sqrt{n_i q^2/(m\varepsilon_0)}(1/v_0)\xi\}$ が働き，高周波ほど $(n_i q^2/(m\varepsilon_0) \equiv \omega_{pe}^2$ が大きい程) 減衰し，積分で平均化しノイズを消し Coherent な成分を残す Boxker-積分器の作用をする。この事は乱流から Coherent な Soliton が発生する事を示す。こうして秩序立った電子ビームのエネルギーが包絡 Soliton のエネルギーとなり，変調不安定化を経て乱流化し，乱流が再び平均された低周波 (ion-波) となり，負の半サイクルに空間電荷制限による包絡 Soliton-carrier の発振へと輪廻転生する可能性が示された。

第 4 図は '包絡 Soliton の優姿'(下側トレース) を示す。この Soliton も変調不安定で変化し，遂には無秩序な乱流となる筋書きが Entoropy-増加を示す熱力学第 2 法則である。第 4 図に於いて上側トレースは，包絡 Soliton 誕生時に相手役を演じたイオン波 (Ion shockwave) である。イオン波の波頭の急激な電位のマイナス勾配 (電界) で Beam が空間電荷制限領域に達し，carrier 発振が始まる事も後に述べる速度空間の理論で確認できる。Soliton 誕生時から Ion-波乱流の '種子'(Ion 衝撃波) が既に存在する事は驚きである。

自然界での第 2 法則に逆らうながれ，即ち Entoropy が拡がった乱流カオスから出発して 'Entoropy-減少' による '整然たる美' の誕生への過程は，最近統計力学の方面で興味が持たれている。熱力学の法則内での 'Entoropy-減少' には Energy が必要であるが，ここでは Beam-energy がこの役割を務める事がわかる。。

第 5 図は Soliton の変調不安定の動きを表す。縦軸は Carrir-frequency である。黒点が時間変化を表すがその間隔は荒い。理由は不確定性原理の要請 $\Delta\omega \cdot \Delta t > 0.5$cycle による。Soliton-電界の圧力 $\sum_{\boldsymbol{k}_1,\omega_1} \varepsilon_0 |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}_1,\omega_1)|^2/2$ による Beam 及び Plasma 密度の減少で周波数は当初減少し，掃引時間の終りに変調不安定による乱れが見える。また Carrier 周波数の減少と共に Parametric-現象による低周波成分の周波数上昇も起きている事がわかる。

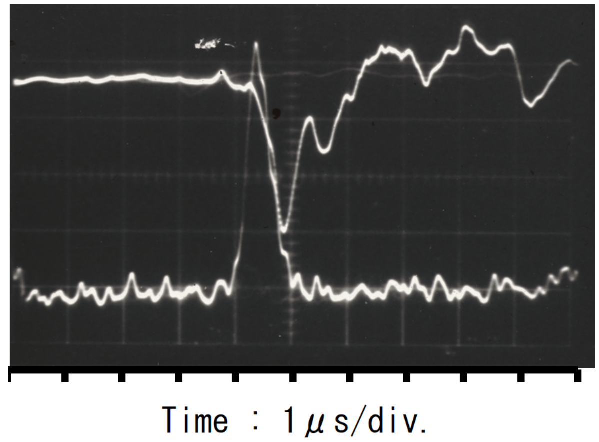


Fig.4 Coupling between an ion shockwave (upper-trace) and the envelope of solitary wave (soliton) are demonstrated. The soliton is detected by a diode. At the minus gradient of the ion potential -maximum, soliton carrier starts to increase. They are move with the same sound speed of the ion-wave interacting each other.

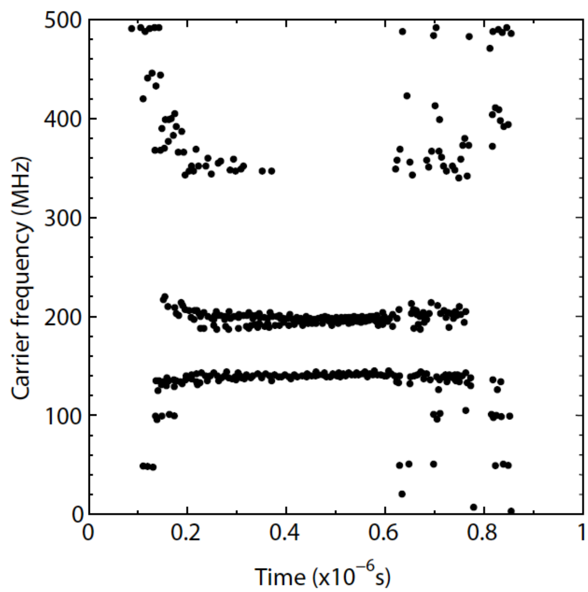


Fig.5 Frequency analysis of the carrier of envelope soliton is shown. Instantaneous frequency is shown by the small dark-circles whose interval satisfies uncertainty rule : $\Delta\omega \cdot \Delta t > 0.5$ cycle. The large pressure of the soliton field excludes both beam and plasma so that the frequency is quickly diminished with time. Onset of the modulational and the parametric instabilities between high- and low-frequency branch are seen.

5．速度空間での解析から判明する事柄

5.1 孤立波の発生と高周波から低周波への流れ

前節で輪廻転生に付いて述べたが，その中で最後に述べるべき重要な過程は高周波から低周波へのエネルギーの移行である。特に包絡 Soliton は三次の非線形で生じるから，まず高周波 $(-\omega_1, -\boldsymbol{k}_1)$ と高周波 $(\omega_1, \boldsymbol{k}_1)$ とが掛け算され積の非線形で直流が発生し，更に三次の非線形で高周波 $(\omega_1, \boldsymbol{k}_1)$ が掛け算され，元の波動と共鳴して大きくなる事が必要である。そこで高周波から一気に直流に落ちる過程も考え得る。

ここで二つの過程について考える。**第1** は Beam 中の波動 (電子ビームの分布関数の Fourier-成分を $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, \omega) \equiv f_k$ とする) とプラズマ中の電位波動の Fourier-成分 $\varphi(\boldsymbol{k}_1, \omega_1) \equiv \varphi_{k1}$ との反応を取り上げ，**第2** は非線形 Landau-減衰で，二つの高周波波動のビート波：$(\omega - \omega_1, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1)$ と速度 $\boldsymbol{v}$ を持つ Beam 中の波動 (分布関数 $f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{v}, \omega_1)$) との相互作用を取り上げる。

まず前者に関連して，電子分布関数 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ に関する Vlasov- 方程式を Fourier-成分で書くと次の様に書ける。

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} f_k - \frac{e}{m} i\boldsymbol{k}\varphi_k \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}{\sum_q}' i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\varphi_{k-q}\cdot\frac{\partial f_q}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad (32)$$

右辺の和に現れる $(')$ は $\boldsymbol{q} = 0$ に対応する項が左辺に存在することから これを除く事を意味する。(32) 式 に於いて $\boldsymbol{k} = 0$ とすると次式を得る。

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m}{\sum_q}' i\varphi_{-q}(-\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial f_q}{\partial \boldsymbol{v}}. \qquad (33)$$

(33) 式は波数 $\boldsymbol{q}\neq 0$ の積の非線形が，ゆっくりとした変化 $f_0(\boldsymbol{v}, t)$ を起こす事を示す。しかし，ビーム電子と高周波のエネルギーの総和は保存され，

電子 ⇔ 高周波

間は電子と高周波の量子 (Plasmon) は共に質量が軽いため反応は速い。

結局，この論文で議論して来た，Ion を動かないとした Navier-Stokes-Poisson-系 (‘NSP 系’) では，電子と高周波のエネルギー和は保存し，実験で見られる現象 (Ion が動く現象) は表せない。そこで，この系をこれ以上考える事を諦め，今後は ‘NSP-系’ を超えた解析例を紹介するため，速度空間での解析で**第2**の非線形 Landau-減衰を，今後取り上げる。

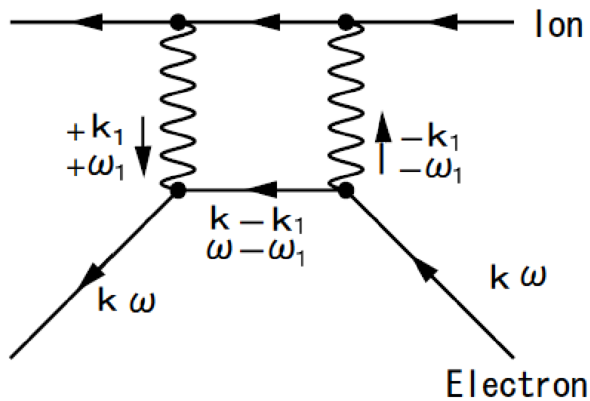


Fig.6 Feynman diagram of interaction between electrons and ion is shown. As the ion has heavey mass, trajectry of the ion is shown by straight line.

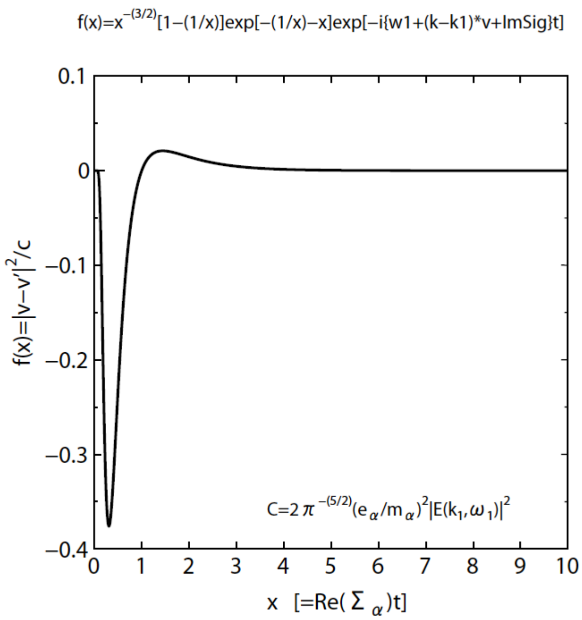


Fig.7 Relations between the correrational length of velocity space, $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|$, and the collision frequency, $Re\Sigma_\alpha$ times t, are represented. The collision frequency means the ratio between velocity $\boldsymbol{v}$ and the mean free path, λ_m, then the horizontal axis means the distance $\boldsymbol{r}$ measured by mean free path, while the vertical axis is related to a correlational energy between two electrons $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{v}'$, i.e., $m|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|^2/2$. When the distance between two electrons, $\boldsymbol{r}$, satisfies the relation: $\boldsymbol{r} < \lambda_m$, then the Cooper-force, i.e., attractive force is acted between them. Thus the attractive force between plasmon brings about the low frequency wave by making a large scale of clump.

5.2 速度空間に於ける解析の概要

ここで考える相互作用はイオン１個と電子２個との三体衝突であり，Feynman-図形で書けば第６図となる。ビーム中の１個の電子 (速度 $\boldsymbol{v}$) がイオンに近ずいたとき，準粒子 (イオンの振動の量子 Phonon，またはプラズマ振動の量子 Plasmon) で (Energy$=-\hbar\omega_1$，Momentum$=-\hbar\boldsymbol{k}_1$)(電子が放出するからマイナス記号) をイオンに送るとイオンはビーム中の他の電子 (速度 $\boldsymbol{v}'$) に準粒子 ($+\hbar\omega_1$,$+\hbar\boldsymbol{k}_1$) (電子が受け取るから ‘収入’ を意味するプラス記号) を送り返す。$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|$ は速度空間の相関距離と呼ぶ。こうして乱流中の揺らぎを介して粒子が影響し合い行動するシステム (Clump) が出来上がる。

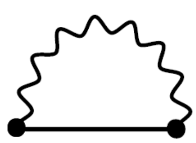
電界強度 $|\boldsymbol{E}(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)|^2$ に依存する計算が可能になった所で電界を次式で計算する。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) = -\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0}\cdot\frac{i\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}^2}\int d\boldsymbol{v}\int d\boldsymbol{v}'\int\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} \cdot G_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')\cdot f_\alpha(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega') \tag{34}$$

$$G_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega') = \frac{-i}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\sum_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')} \cdot\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\omega,\omega'}\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'), \tag{35}$$

$$\textstyle\sum_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega') \tag{36}$$

$=$



$$= \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\sum_{\boldsymbol{k}_1}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}E(\boldsymbol{k}_1,\omega_1)\frac{\partial}{\partial v}\Big\{ G_\alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{v},\omega-\omega_1;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega') \cdot\boldsymbol{E}(-\boldsymbol{k}_1,-\omega_1)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\Big\}.$$

この様に Vlasov-Poisson の式を積分方程式で書いたときの ‘核’ $G_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ は Green-関数，また $\sum_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ は自己エネルギーで、$Re\Sigma_\alpha$ が正の場合は ‘衝突周波数’ または ‘減衰率’、負の場合は ‘増加率’ になる。一方，$Im\Sigma_\alpha$ は ‘周波数拡がり’ または ‘周波数シフト’ を表す。

さて，(36) 式中の Σ_α が電界 $\boldsymbol{E}(-\boldsymbol{k}_1,-\omega_1)$ と Green-関数 $G_\alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{v},\omega-\omega_1;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ との ‘Convolution’ を形成しているため，二次の非線形になっており，これを含む (35) 式の Green-関数 $G_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega;\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ は二次の非線形量であり，結局，電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$ は更に一次の電子の分布関数 $f_\alpha(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ が乗じられ，三次の非線形量となる。Soliton は Coherent : $\boldsymbol{k}$=$\boldsymbol{k}_1$, ω=ω_1 の場合に発生するから，$G_\alpha(\boldsymbol{k}$=$0,\boldsymbol{v},\omega$=$0)$ が必要になる。

まず $Re\Sigma_\alpha(t)$ に時間 t を乗じた無次元量 $x\equiv Re(\Sigma_\alpha)t$ を考える。x は次式を満たす。

$$x\simeq\frac{2}{\pi^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\sum_{\boldsymbol{k}_1}\frac{\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{k}_{1j}}{\boldsymbol{k}_1^2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}_1,\omega_1)|^2 \cdot\frac{1}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^2}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\exp\left(-\frac{1}{x}-x\right) \cdot\exp\left[-i\left\{\omega_1+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{v}+Im\Sigma_\alpha\right\}t\right] \tag{37}$$

(37) 式に於いて横軸に x，縦軸に $|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^2/C$ を取って図に描いたものが第７図であり，$Re(\Sigma_\alpha)t$ に対する相関 Energy$=m|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^2|/2$ の変化を示す。但し

$$C=\frac{2}{\pi^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\sum_{\boldsymbol{k}_1}\frac{\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{k}_{1j}}{\boldsymbol{k}_1^2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}_1,\omega_1)|^2 \tag{38}$$

を一定としている。

第７図中の $f(x)$: $f(x)\equiv\dfrac{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^2}{C}$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{x}-x\right) \cdot\exp\left[-i\left\{\omega_1+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{v}+Im\Sigma_\alpha\right\}t\right] \tag{39}$$

に於ける最後の因子は非線形 Landau-減衰の条件 :

$$(\omega-\omega_1)-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{v}+i\Sigma_\alpha=0 \tag{40}$$

を満たす周波数 ω を含む因子:$\exp(-i\omega t)$ が

$$\exp\left[-i\left\{\omega_1+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{v}+Im\Sigma_\alpha\right\}t\right]$$

となる事から理解出来る様に (40) 式は (35) 式の Green-関数の特異点を与える共鳴条件:

$$\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\Sigma_\alpha=0 \tag{41}$$

に於いて二つの波動 $(\omega,\boldsymbol{k})$ と $(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)$ のビート波との共鳴を表し，ビート波の増大は高周波から低周波への流れを意味する。また図に於いて横軸は $Re(\Sigma_\alpha)t$ であるが、衝突周波数 $Re(\Sigma_\alpha)$ は平均自由行程 λ_m、電子速度を $\boldsymbol{v}$，時間を t とすれば $\boldsymbol{v}t$=$\boldsymbol{r}$ は t-秒間に走る距離 $\boldsymbol{r}$ であり，$Re(\Sigma_\alpha)$=$\boldsymbol{v}/\lambda_m$ であるから，$Re(\Sigma_\alpha)t$ は距離を λ_m の単位で測った量を表す。一方，縦軸は $m/2$ を乗じると $m|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^2/2$ は相関エネルギーになる。

第７図の特徴は二電子間の距離 $|\boldsymbol{r}|$(横軸の値) が $0.31\lambda_m < |\boldsymbol{r}| < 1.44\lambda_m$ の範囲では引力 (Cooper-force) になる事である。また第６図は超伝導現象の場合と同じで，超伝導の Ginzburg-Landau の式と包絡 Soliton を記述する Nonlinear Schrödinger Equation とが同型であり，Soliton 存在の証明となる。

要は、準粒子 (Plasmon,Phonon) 間に働く力が引力であり、一箇所に集まろうとする性質があり，大きい塊 (Clump) になれば波長大なる低周波となり、Coherent になるとの説明は容易に理解できる。

第８図は電子ビームの分布関数を $f_\alpha(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}',t')$ とした場合，Fourier-変数 $\boldsymbol{r}'\Rightarrow\boldsymbol{k}'$，$t'\Rightarrow\omega'$ の Fourier-変換によって (34) 式の $f_\alpha(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega')$ になるとした場合，t=0 なる時刻に速度空間で

$$f_\alpha(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{v}',\omega') = f^{(0)}(\boldsymbol{k}')n_b\cdot\delta(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_0)$$

なる分布を持つとする初期値問題の (34) 式の解 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$ を時間に関して逆変換した量，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)$ を横軸に時間をとって図示したものである。但し，上記の $f^{(0)}(\boldsymbol{k}')$ はビームの空間構造を決める関数，n_b はビーム電子密度，$\boldsymbol{v}_0$ は電子ビーム速度とする。この解の逆変換 $\boldsymbol{k}\Rightarrow\boldsymbol{r}$ によって最終の解 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ が得られる事になるが，ここでは，これ以上省略する。

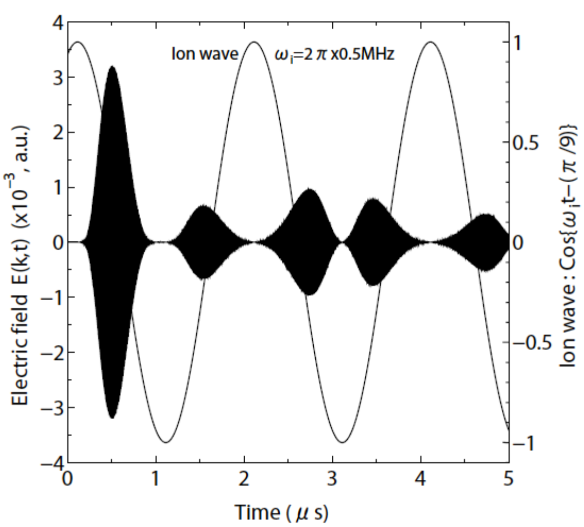


Fig.8 Solution of an initial value problem is shown. The initial value of a δ-function in velocity space as the beam electron distribution is assumed. The solution is derived from the theory which was discussed in the reference 1). The scale of the left side is used for the envelope solitary wave, while the right side is utilized for an ion wave. The timing of appearance for the soliton is quite similar to the case of contineous injection of the electron beam as shown in fig. 9. The cosine curve: $\mathrm{Cos}\{\omega_i t-(\pi/9)\}$ is assumed for the ion wave.

6. 実験結果との比較

実験にはミラー磁界を用い，磁界は中央部で 80Gauss 程度、ミラー部で 110Gauss 程度である。密度は中央部で高く、両端で低い。従って正確な解析には，Carrier-周波数は磁界とプラズマ密度の関数となり，場所的に異なり，場所的に異なった分散式の解析 [3)] が必要になる。一方，電子銃はピアス型 [4)] で我々の設計製作になるが，加速電圧 1920(V)、カソード電流 50~60(mA) 程度であり、差動排気で狭い場所を通過させるため，集電極に届く電子電流は 20(mA) 程度である。Carrier 波動は高域混成波の分枝に属し，その周波数は 400MHz 程度で，2GHz の Oscilloscope で Carrier-位相の直接観測が可能である。高域混成波は包絡 Soliton となり包絡線はイオン波と Couple し，音速で通常は反ビーム方向に伝播するが，Carrier の位相伝播方向はビーム方向である。我々は原子核工学のエネルギー測定法で粒子的波動 (Soliton,Caviton) の観測方法を開発し，反ビーム方向及びビーム方向への包絡線の移動を確認した [6)]。

第９図の上側トレースはイオン波を示し，下側トレースは包絡 Soliton を Diode で検波した包絡線を表す。第８図と異なる点は，第８図が初期値問題の解であり，Plasmon による Cooper-force の影響も表す一方，第９図は電子ビームの連続的注入の場合を表し Cooper-force の影響はあまり見られない。しかし僅かであるが，８目盛り付近で下側トレースが上がってはいる。イオン波の電位勾配が負の場合に包絡 Soliton が発生する事は Navier-Stokes-Poisson の場合を含めて共通である事が理解できる。

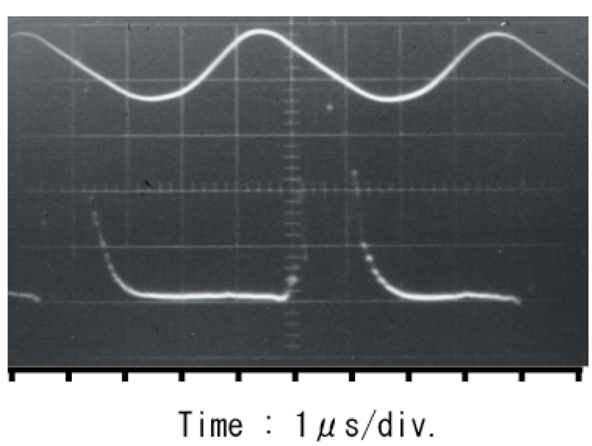


Fig.9 Timing of the soliton generation (the lower trace) obtained by experiment is shown, while the upper trace represents the ion wave. The envelope soliton which is detected by diode, appears at the downward phase of the potential as shown in the above trace.

7. 結論

ここでは、流体力学で使われている Navier-Stokes の式の上に更に Poisson の式を連立させて電荷を持った流体を取り扱う事とし，プラズマ中に電子ビームを通過させた時に，プラズマ振動の励起が起きるかどうか，また，その波動の波形はどの様であるかを調べる事を目的とした。我々は以前に上記方程式よりも公理に近い理論，即ち Liouville-理論から BBGKY(階層方程式) の理論 [7] を経て Boltzmann-方程式が導出される過程を調査した経緯がある。Boltzmann-方程式は良く知られているように、二体衝突項を持ち、電荷を持たない気体分子のガスに適用されるが，完全電離ガスの取り扱い (遠距離衝突が主体の場合) には不適切で、二体衝突項を取り除いた Vlasov-方程式を用いるのが適当であるとされる。そのかわり電界の項をより大切にし，Poisson の式を連立する事が必要とされる。

Vlasov-Poisson 系を適用して上記現象を解析する際，位置空間を考えずに速度空間のみを考え，プラズマ中に電子ビームを通過させた時の現象を解析したのが文献 1) である。しかし，この解析には位置空間が入っていないため，位置空間での波動伝播の様子の詳細が必要であると予てから考えて来た。上記 Navier-Stokes-Poisson 系は位置空間は考えているが，速度空間が全く考えられていないから、今回の計算で判明した結果を文献 1) と比較したものも、この論文の後半の議論に含めた。

さて我々は (24) 式に電位 $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ なる関数が満たすべき関数方程式を導出した。変数の $\boldsymbol{\xi}$ が一箇所現れ，これは波動が $\boldsymbol{\xi}$ の指数関数で減衰する事を示す Landau-減衰の因子である。従って、この関数方程式を解くには $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ を与えなければならないという非線形独特の状況に至った。逆にいえば，関数方程式を満たせば電位はどんな形でも良い事を意味し，様々な波形が伝播して良い事になり，至極当然な結果である。そこで初期関数として正弦波を入れると正弦波を基調とする乱流が得られ，周波数の高い乱流の多くは $\boldsymbol{\xi}$ の増加と共に Landau-減衰して単純な正弦波に近い波動になる事が判明した。ところで、$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t$ であるから，$\boldsymbol{\xi}$ と時間 t とは逆方向に進むから，$\boldsymbol{\xi}$ の増加と共に Landau-減衰する事は逆に辿れば時間 t の増加と共に僅かなノイズから指数関数的にプラズマ振動が発振し，やがて乱流に至るという，通常自然に見られる現象になる。

速度空間の解析 [1] で見られていた，ゆっくりした DC-基調の電位の下降の際にプラズマ振動が発振を開始する事は今回の位置空間での解析にも現れたことで特筆すべきである。これはビーム電子が電位のマイナス勾配で減速される際に制動輻射でプラズマ振動を放出する事を意味する。

最も大切な事柄として Navier-Stokes-Poisson 系は損失が無く，減衰した高周波のエネルギーは流れのエネルギーに戻る。実験ではイオン波が発生しイオンに移ったエネルギーは戻って来ない。そこで電子波動は包絡 Soliton の形で現れる。実験結果に合わせるには One Component Plasma-Model や Jellium-Model から離れ，従ってイオン密度は一定でなく，電子との相互作用で決まるとの考えを導入する必要があるが，当然モデルの解析は難を極める事になる。

8. 参考文献

1) I. Mori, T. Morimoto; *Interaction of Two Electrons by Interchanging the Phonon Occured in the Beam-Plasma*; J. Plasma Fusion Res. SERIES Vol.6 (2004) 577.

2) I.Mori,T.Morimoto; *The Phenomena Occur--ing by the coupling between an Electron Solitary Wave and an Ion Wave in a Beam Plasma System*; J.Plasma Physics (2006) Vol72, Part6, pp.1-6, Cambridge Univ. Press.

3) I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, K.Tominaga;*Structure of Multi-Dimensional Soliton and Generation of Caviton in the Nonlinear Beam-Plasma System*; J. Plasma Fusion Res. SERIES, Vol.2 (1999) 363-367.

4) J. R. Pierce; *Space Charge in Electron Beams* ; chap.9, Theory and Design of Electron Beams; D.Van Norstland Co. Prinston, (1954) 263.

5) P. T. Kirstein, C. S. Kino, W. E. Waters; *Thermal Effects and Nonlaminar Flow*; chap.6 Space Charge Flow; McGraw-Hill (1967) 263.

6) I. Mori; *New Method of Observing Nonlinear Waves in a Plasma*; Rev. Sci. Instr. **57** (1986) 566-671.

7) N.N.Bogolyubov; :Н.Н.Боголюбов 書名：Проблемы Динамической Теории в Статистическои Физике (統計物理学における動力学的理論の諸問題); 出版社名：Гостехиздат (1946) 統計物理学における運動学の問題; 森　一郎、浦島新男 著訳 (1992) 開成出版