

「ガリレオの斜面実験から現代風の微分・積分へ」を終えて — その後の雑感(2)と応用例(2) —

鎌田 弘* 太良尾 浩生** 由良 諭***

After Finishing Series “Learning Derivation and Integration through Galileo’s Acceleration Experiment”

— Miscellaneous Impression (2) and Engineering Application Examples (2) —

Hiroshi KAMADA, Hiroo TARAO and Satoshi YURA

Abstract

Lecture plan titled “the series, Development of Assistant Tool for Learning Derivation and Integration through Galileo’s Acceleration Experiment” has been published in Bulletin of National Institute of Technology, Kagawa College. In 2023, the lecture plan was implemented in a class for interested second-year students at the Takamatsu Campus of Kagawa College. This report describes the miscellaneous impressions based on that practice and the highlights basic application examples in engineering field, continuing from the "aftermath" of previous one.

Keywords : Galileo’s acceleration experiment, miscellaneous impressions, application examples in engineering field

1. はじめに

ガリレオの斜面実験から微分積分へ(その1¹⁾, その2²⁾, その3³⁾)を, 授業教案として研究紀要に発表してきた。その教案の授業実践を, 香川高専高松キャンパスの卒業生のOB・OG会(工業会)主催で, 令和5年9月に香川高専高松キャンパスにおいて, 2年生希望者を対象に90分×3日で行った。その実践から今回は, 雑感(2)「微分法の第2平均値定理のある解釈とある使用例」と, 応用例(2)「微分・積分の専門分野での基本的応用例」を考えた。応用例(2)は, それぞれの共著者が担当した。

2. 雑感(2)

2.1 微分法の第2平均値定理

2.1.1 第2平均値定理

平面運動しているモノの時刻 t での位置座標を $(x(t), y(t))$ とする。このとき点 $P(t, x(t), y(t))$ のグラフのイメージは, 曲線 C (図1)である。ただし, $a \leq t \leq b$, $\dot{x}(t) \neq 0$ とする。このとき, 適当な $t = \xi$ において次式が成り立つ。

$$\frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\xi} / \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\xi} = \dot{y}(\xi) / \dot{x}(\xi) \quad (1)$$

*香川高等専門学校 名誉教授

**香川高等専門学校 電気情報工学科

***香川高等専門学校 機械電子工学科

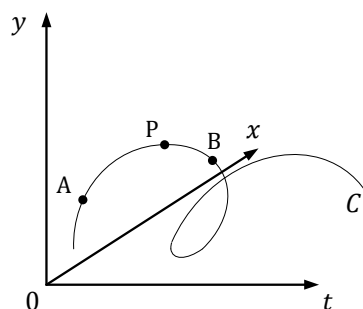


図1 曲線C

2.1.2 微分法の第2平均値定理の証明

いま, $\{y(b) - y(a)\} / \{x(b) - x(a)\} = k$ とおき, $F(t) = \{y(t) - y(a)\} - k\{x(t) - x(a)\}$ を考える。このとき, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ なので, グラフ「 $F(t) - t$ 」(図2)で, 適当な ξ で t 軸に平行な接線が引けるので, $|dF(t)/dt|_{t=\xi} = 0$, 即ち $\dot{F}(\xi) = 0$ となる。よって, $\dot{F}(t) = \dot{y}(t) - k\dot{x}(t)$ から $\dot{F}(\xi) = \dot{y}(\xi) - k\dot{x}(\xi)$ となり, $k = \dot{y}(\xi) / \dot{x}(\xi)$ が得られる。したがって,

$$\begin{aligned} \{y(b) - y(a)\} / \{x(b) - x(a)\} &= \dot{y}(\xi) / \dot{x}(\xi) \\ &= |dy/dt|_{t=\xi} / |dx/dt|_{t=\xi} \end{aligned} \quad (2)$$

である。

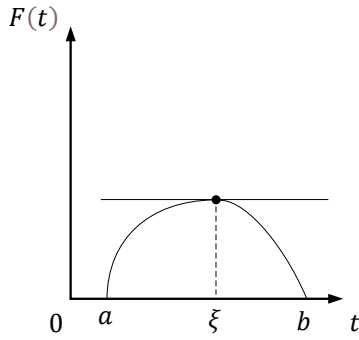


図2 $F(t) - t$ 平面上の接線

2.2 グラフ上の平均値定理

2.1節の「微分法の第2平均値定理」を3つのグラフに分解して考える。図1のグラフを、 $y - x$ 平面でのグラフ(図3)、 $y - t$ 平面でのグラフ(図4)、 $x - t$ 平面でのグラフ(図5)に分解してみる。

2.2.1 $y - x$ 平面でのグラフにおける平均値定理

図1の曲線Cを、 $y - x$ 平面へ投写した曲線(図3)を考える。点 $A_1(x(a), y(a))$, 点 $B_1(x(b), y(b))$, 点 $P_1(x(\xi), y(\xi))$ として、線分 A_1B_1 の傾きは、 $\{y(b) - y(a)\} / \{x(b) - x(a)\}$ である。他方、図3で関数 $y = y(x)$ を想定するとき、点 P_1 での接線の傾きは $|dy/dx|_{x=x(\xi)}$ である。よって、2.1.1から、次式が云える。

$$|dy/dx|_{x=x(\xi)} = |dy/dt|_{t=\xi} / |dx/dt|_{t=\xi} \quad (3)$$

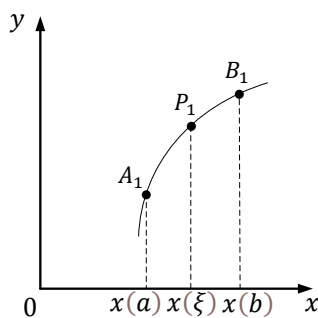


図3 $y - x$ 平面への投写曲線

2.2.2 $y - t$ 平面でのグラフにおける平均値定理

図1の曲線Cを、 $y - t$ 平面へ投写した曲線(図4)を考える。点 $A_2(a, y(a))$, 点 $B_2(b, y(b))$, 点 $P_2(\xi, y(\xi))$ として、線分 A_2B_2 の傾きは、 $\{y(b) - y(a)\} / (b - a)$ である。図4で関数 $y = y(t)$ を想定するとき、点 P_2 での接線の傾きは $|dy/dt|_{t=\xi}$ である。よって、

$$\{y(b) - y(a)\} / (b - a) = |dy/dt|_{t=\xi} \quad (4)$$

または、

$$\{y(b) - y(a)\} = \dot{y}(\xi) \times (b - a) \quad (5)$$

となる。

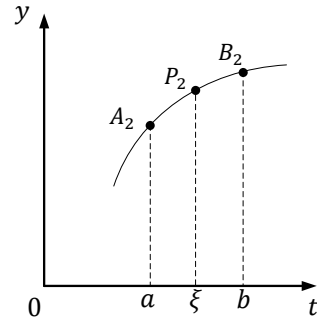


図4 $y - t$ 平面への投写曲線

2.2.3 $x - t$ 平面でのグラフにおける平均値定理

図1の曲線Cを、 $x - t$ 平面へ投写した曲線(図5)を考える。点 $A_3(a, x(a))$, 点 $B_3(b, x(b))$, 点 $P_3(\xi, x(\xi))$ として、線分 A_3B_3 の傾きは、 $\{x(b) - x(a)\} / (b - a)$ である。図5で関数 $x = x(t)$ を想定するとき、点 P_3 での接線の傾きは $|dx/dt|_{t=\xi}$ である。よって、

$$\{x(b) - x(a)\} / (b - a) = |dx/dt|_{t=\xi} \quad (6)$$

または、

$$\{x(b) - x(a)\} = \dot{x}(\xi) \times (b - a) \quad (7)$$

である。

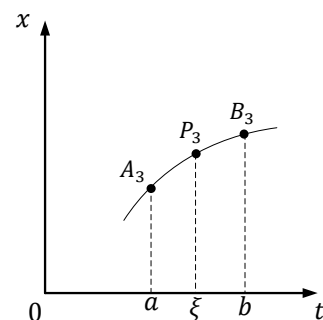


図5 $x - t$ 平面への投写曲線

2.3 微分法の第2平均値定理の「ある解釈例」及び「ある使用例」

変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトルの導入を考察する。

2.3.1 微分法の第2平均値定理の「ある解釈例」

平面運動しているモノの時刻 t での位置座標を $(x(t), y(t))$ とする。このときモノの運動を、 $y - x$ 平面での曲線D(図6参照)としてイメージする。時

刻 t での曲線 D 上の位置を点 $T(x(t), y(t))$ とし、点 T での曲線 D への接線 TP を考える (図6, 7参照)。

図6において、 $dx = \dot{x}(t) \times dt$, $dy = \dot{y}(t) \times dt$ とし、変位ベクトル $d\vec{s} = (dx, dy)$ を考えると、その方向は接線方向である。ここで、

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= (\dot{x}(t) \times dt, \dot{y}(t) \times dt) \\ &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \times dt \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

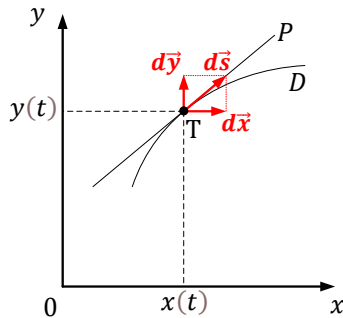


図6 変位ベクトル $d\vec{s}$

図7において、速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を $d\vec{s}/dt$ と定義し $d\vec{s} = \vec{v}(t) \times dt$ と考えると、速度 $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ となり、 $(v_x(t), v_y(t))$ とも書く。このとき、速度 $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で、その大きさ v は

$$v = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad (9)$$

となる。ただし、 $v_x(t)$ は x 軸方向の速度、 $v_y(t)$ は y 軸方向の速度である。

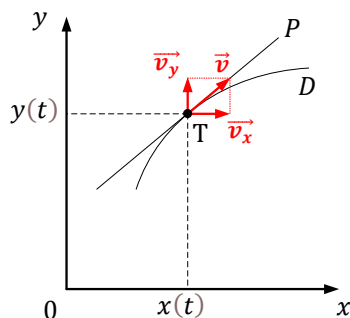


図7 速度ベクトル \vec{v}

2.3.2 微分法の第2平均値定理の「ある使用例」

平面で円運動をしている点 P を取り上げる。即ち、中心が原点 O で、半径 r の円周上を、一定の角速度 ω (rad/s) で運動している点 P とする。

(i) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を考える (図8参照)。

位置ベクトル $\vec{OP}(t) = \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) = (r \cdot \cos\omega t, r \cdot \sin\omega t)$ から、速度 $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-r\omega \cdot \sin\omega t, r\omega \cdot \cos\omega t)$ となる。このとき、ベクトルの内積 $\vec{v}(t) \cdot \vec{p}(t) = 0$ なので $\vec{v}(t)$ と $\vec{p}(t)$ は垂直であり、 $\vec{v}(t)$ の方向は点 P での円の接線方向である。さらに、速度 $\vec{v}(t)$ の大きさ v は

$$v = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = r\omega \quad (10)$$

となる。

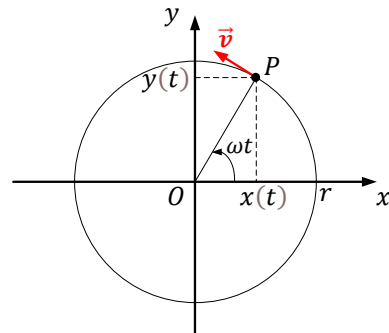


図8 速度ベクトル \vec{v} (円運動)

(ii) 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を考える。(図9参照)

加速度ベクトル $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt = \dot{\vec{v}}(t)$ と定義すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= (a_x, a_y) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \\ &= (-r\omega^2 \cdot \cos\omega t, -r\omega^2 \cdot \sin\omega t) \\ &= -\omega^2 \times (r \cdot \cos\omega t, r \cdot \sin\omega t) \\ &= -\omega^2 \times \vec{OP} = \omega^2 \times \vec{PO} \end{aligned} \quad (11)$$

このことから、加速度 $\vec{a}(t)$ の向きは \vec{PO} の向きで、中心 O を向いている (図9参照)。さらに加速度 $\vec{a}(t)$ の大きさ a は、

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 \quad (12)$$

となる。

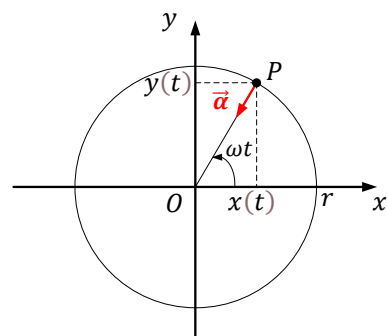


図9 加速度ベクトル \vec{a} (円運動)

3. 専門学科での応用 (2)

3.1 積分の応用例：(電気情報工学科) 電磁気学

香川高専は2019年度から新カリキュラムに移行し、電気情報工学科では、4年生の前期から学習していた電磁気学を3年生後期から学習することになった。電磁気学では、高校課程で学習する電磁気に関する定性的な理解のもとに、ベクトルや微分積分などの数学を用いて定量的に式を導出することが多い。すなわち、単なる計算ではなく、物理的に意味のある数式を組み立てたうえで数学的に解くことになる。なお、高校課程の電磁気においても、点電荷による電界や無限長直線電流による磁界のような数式(公式)は出てくるが、限定的な条件における式であり、専門科目の電磁気学では様々な条件において電界や磁界を導出することになる。

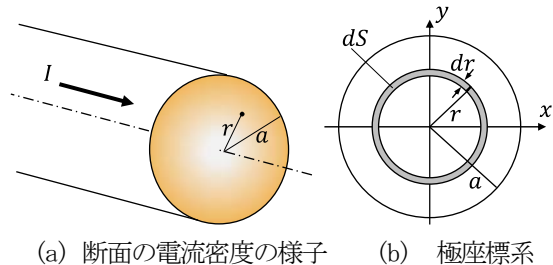
ここで、工学では電界や磁界と呼ぶが、物理ではそれぞれを電場や磁場と呼ぶ。元々は Electric Field や Magnetic Field を工学分野や物理学の分野から和訳の表現が異なるだけであり、電界と電場も同じことであり、磁界と磁場も同じである。しかし、これらが別の物理量と考える学生もいる。さらに、高校課程の数学では x で微積分することや、ベクトルを \vec{a} と表記することが一般的であるが、工学分野では様々な変数で微積分することや、ベクトルを \mathbf{a} と表記することから、学生には戸惑いがある。

このように、学生にとって高校課程で学習した「慣れ」のままで専門科目を学習すると、表現の違いなどから認識のずれが生じることがある。したがって、高校課程における一般教養と専門工学の中間において橋渡しとなるような学習が必要である。特に、高等専門学校は高校課程と大学(工学部)課程の一貫教育機関であるので、このような学習を導入しやすく、むしろ取り入れるべきである。むしろ、本学科の4年生でも橋渡しの学習は行われているが、3年生ではそれ以上に導入学習が必要である。橋渡しの学習として、数学で学習した積分をいかに電磁気学で活用するかを著者らで検討し、実際に3年生後期で授業を行っている。本章では、その内容の一部と、その後に学生アンケートをとったので報告する。

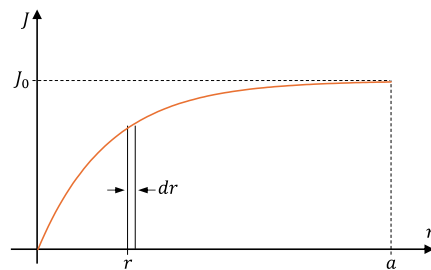
3.1.1 導線を通る電流量

空間上の断面における電流密度が与えられたときの電流を考える。電流密度とは単位面積あたりを流れる電流の密度なので、これらの関係は「電流」=「電流密度」×「面積」という原始式で表される。ただし、この

原始式は、「電流」の方向は「面積」の面と垂直な方向に流れ、面全体の電流密度は均一であることが前提である。したがって、半径 a [m]の円柱導線内を均一な電流密度 J [A/m²]で電流が流れている場合、導線を通る電流 I は $J \cdot \pi a^2$ [A]となる。



(a) 断面の電流密度の様子 (b) 極座標系



(c) 断面の半径に対する電流密度 J
図10 導線を通る電流の求め方

しかし、導線が大電流が流れる場合や、高周波電流が流れる場合では、表皮効果⁴⁾により中心軸よりも表面に近いところで電流密度が大きくなる(図10(a))。すなわち、電流密度は不均一になる。このとき電流密度 J を中心軸からの距離を r [m]として次式(13)で表すこととする。

$$J = J_0(1 - e^{-kr}) \text{ [A/m}^2\text{]} \quad (13)$$

ここで、 J_0 と k は定数であり、 J は $0 \leq r \leq a$ の範囲である。なお、 r に対する電流密度 J の大きさは図10(c)のようになる。このとき、導線の断面全体を通る電流 I を求めたい。しかし、導線の断面において電流密度は r の位置によって異なるので、単純に式(13)と断面積(πa^2)の積を計算するのではない。

円柱導線は軸対称であるので、図10(b)のように断面を極座標系として考える。 $r = r$ において微小幅 dr をとったときにできる円環の微小な面積 dS は、

$$dS = 2\pi r dr \text{ [m}^2\text{]} \quad (14)$$

と表すことができる。ここで、 dr は「円環が長方形と思えるくらい微小な長さ」と考えている³⁾。おそらく、積分の難しさは、このような dr (数学では dx)がどのくらいの長さなのかをイメージしにくいことに起因するのではないかと推測される。ここでの dr は上述のと

おりであり、長さであることの認識が重要である。また、式(14)の右辺は「長さ」×「長さ」の次元となっていることから、物理的に面積を示していることがわかる。同時に、 dr の厚みをもつ円環部分 dS における電流密度は均一であると考ええる。すると、円環部分のみを流れる微小な電流量 dI は、原始式から、

$$dI = J \cdot dS = J \cdot 2\pi r dr \quad [\text{A}] \quad (15)$$

と表すことができる。なお、式(15)の次元(単位系)を確認すると、電流密度と面積の積なので、電流の次元になる。したがって、この dr を拡張する、すなわち式(15)から変数 r を円柱導線の範囲で積分すると、円柱導線を流れる電流 I は、

$$\begin{aligned} I &= \int dI = 2\pi J_0 \int_0^a (1 - e^{-kr})r dr \\ &= 2\pi J_0 \left\{ \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{k} a e^{-ka} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2} (e^{-ka} - 1) \right\} \quad [\text{A}] \quad (16) \end{aligned}$$

となる。ただし、この積分には部分積分が必要である。したがって、円柱導線の断面という空間において、電流の原始式を適用するために、微小長さ dr を考えた。さらに、 dr を断面全体に拡張するように積分することで、全体の電流を求めた。

3.1.2 分布電荷による電界

まず、高校課程の物理(電磁気)において電界について学習する。図11のように、点電荷 q [C]から r [m]だけ離れた点Pにおける電界の大きさは次式(17)のような基本式として学習する。

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [\text{V/m}] \quad (17)$$

ここで、 ϵ_0 は真空における誘電率であり、 $1/4\pi\epsilon_0$ はクーロンの比例定数である。式(17)はガウスの法則からも導出することができる。式(17)から、電界の大きさは電荷の大きさに比例し、電荷からの距離の二乗に反比例すること分かる。なお、電界 E はベクトルであり、その方向は点電荷と点Pを結ぶ直線方向になる(図11)。

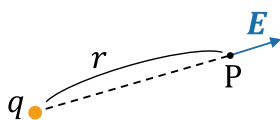


図11 点電荷 q による電界 E

一方、専門科目の電磁気学では、電界と電気力線との関係のような定性的な考え方と上式(17)を元にして、

分布電荷によって任意の点に生じる電界を解析的に導出する。例えば、図12のように、 z 軸上に単位長さあたりの線電荷密度 λ [C/m]の電荷が均一で無限に分布するとき、直線($z = 0$)から垂直に a [m]だけ離れた点Pにおける電界をどのように求めるのが標準的な例としてある⁹⁾。これは、単純に電源と負荷の間の往復導線が十分長い場合に、片方の導線から発生する電界をイメージしている。

式(17)を用いて、図12の点Pにおける電界を求める場合、次のような考え方になる。 z 軸上の $z = z$ において微小線分 dz をとると、この微小線分に含まれる微小な電荷 dq は、

$$dq = \lambda dz \quad [\text{C}] \quad (18)$$

となる。ここで、 dz とは「 dq が点電荷と思えるくらい微小な長さ」であり、式(17)と同じように原始式にあてはめられるような考え方をする。また、微小電荷 dq から点Pまでの距離 l は、図12から、

$$l^2 = z^2 + a^2 \quad [\text{m}^2] \quad (19)$$

となる。よって、微小電荷 dq によって点Pに生じる微小な電界 dE の大きさは、これらを式(17)に適用して、

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)} \quad [\text{V/m}] \quad (20)$$

と表すことができる。ただし、電界はベクトルであり、点Pにおける微小電界 dE の方向は図12のとおりである。しかし、 z 軸上の電荷全体を考慮したとき、点Pの電界は z 軸に対して垂直な成分(a 方向)のみになる(z 成分は、 z 軸の正側の電荷と負側の電荷によって打ち消される)。したがって、式(20)の a 成分 dE_a は dE の余弦成分になるので、

$$dE_a = dE \cos \theta \quad [\text{V/m}] \quad (21)$$

となり、 $\cos \theta$ は同図中の直角三角形を利用すると、

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad (22)$$

である。したがって、式(20)と(22)を式(21)に代入することで、

$$dE_a = \frac{\lambda a dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \quad [\text{V/m}] \quad (23)$$

を得る。ここで注目すべきは、式(20)と(23)は共に電界を示す式であり、それぞれの分子は電荷の次元(単位系)であり、分母の比例定数を除いた部分の次元は距離の二乗となっている。これは、式(17)に示す原始式の次元と同じである。このように、式(18)から式(23)まで、それぞれの左辺の物理量に対して、右辺の次元(単位系)が一致しているどうかを考えながら、数式を組み立てていくことが重要である。

最終的に、電荷が分布している $-\infty \leq z \leq +\infty$ の範

囲で式(23)を積分する(dz にある微小電荷による点Pの微小電界 dE の a 成分 dE_a を、 $-\infty$ から $+\infty$ まで連続的に足し合わせる)ことで点Pにおける電界の大きさが次式のとおり求まる。

$$E_a = \int dE_a = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \text{ [V/m]} \quad (24)$$

ただし、この積分では $z = a \tan \theta$ で置換すると容易に解くことができる。なお、式(24)における分子の単位は[C/m]で、分母のそれは[m]なので、式(24)における全体の次元は式(17)の次元(単位系)になっていることが確認できる。

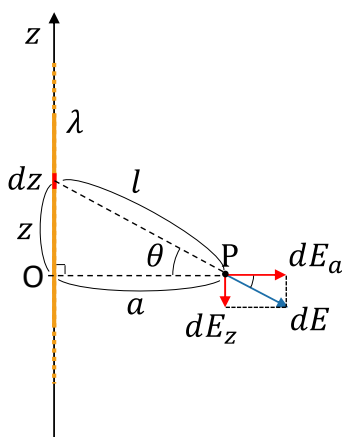


図12 無限長直線電荷による点Pでの電界

3.1.3 アンケート調査とまとめ

本章では、積分が専門科目でどのように扱われるのかの一例として、香川高専電気情報工学科3年次で学習する電磁気学の導入部を紹介した。しかし、高校課程で学習する数学とはベクトルの表記法が異なることや微分は x だけでないことなど、学生には戸惑いがあることから、高校数学と専門科目との間の橋渡しとなるような導入を取り入れている。これは高校課程から大学課程を一貫的な教育ができる高専教育の特徴と言える。

また、高校課程で学習した限定的な内容を大学課程で拡大・拡張する場合でも、基本的には「均一」や「点」と思えるような微小空間をとり、物理的な意味を考えながら原始式に適用して微小な物理量(本章のような電流や電界)を考えることになる。最終的には微小量を拡大・拡張することが積分になる。このような考え方ができるのが理工系の学生であると考えられる。

最後に、2023年度の3年生(計38名)に対して、このような導入の授業を行った後に学生アンケートを実施した。その結果を表1に示す。同表の結果から、90%の学生は数学的に積分を解くことはできるが、それをどのような場面で利用するのかを理解しているのは約40%であった。一方、今回の導入授業を行うことで、90%近くの学生が積分をどのような場面で利用するのか理解できたようである。

表1 導入授業後のアンケート

Q1. 数学で学習した積分の授業について、あなた自身の理解度は?	よく理解できている	7
	理解できている(普通)	27
	あまり理解できていない	4
Q2. 数学学習した積分の授業で、実際に「積分」がどのような場面で利用されるのか理解していましたか?	理解していた	6
	ある程度は理解していた	9
	あまり理解していなかった	22
	全く理解していなかった	1
Q3. 専門科目で積分の授業を行い、理解度はどのように変わりましたか?	さらに理解できるようになった	30
	特に変わらない	8
	余計に理解できなくなった	0
Q4. 専門科目で積分の授業を行い、どのような場面で積分が必要なかを理解できましたか?	よく理解できた	10
	理解できた	23
	あまり理解できなかった	5
	余計に分からなくなった	0

4. おわりに

授業教案「ガリレオの斜面実験から微分・積分へ」を研究紀要に発表している。その教案の実践実施(2回目、令和5年9月)を香川高専高松キャンパスの2年生の希望者対象に90分×3日で行った。その実践から、補足すべき内容(雑感(2))、及び微分・積分に関わる専門分野の基本的応用例(応用例(2))を取り上げたものが本稿である。今後も専門学科教員の協力を得て、学生が微分・積分に慣れ親しみ理解を深める基本的応用例があれば掲載を続けたい。

参考文献

- 1) 鎌田, 小島, 上代, 由良, “(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ(その1) ガリレオの斜面 実験をひも解く”, 香川高等専門学校研究紀要, Vol.11, pp.7-12, 2020
- 2) 鎌田, 小島, 上代, 由良, “(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ(その2) ガリレオ流の微分・積分を模索する”, 香川高等専門学校研究紀要, Vol.12, pp.7-14, 2021
- 3) 鎌田, 小島, 由良, “(シリーズ) ガリレオの斜面 実験から微分・積分へ(その3) 現代風の微分・積分へのアプローチ”, 香川高等専門学校研究紀要, Vol.13, pp.1-10, 2022
- 4) 山田, 桂井: 「電気学会大学講座 電気磁気学」, 3版改訂, 電気学会
- 5) 例えば, 多田, 柴田: 「電磁気学」, コロナ社, 2005