（シリーズ） ガリレオの斜面実験から微分・積分へ
―（その１） ガリレオの斜面実験をひも解く―

鎌田 弘* 小島 隆史** 上代 良文** 由良 諭***

Development of Assistant Tool for Learning Derivation and Integration through Galileo's Acceleration Experiment
— (Part 1) Explanation of Galileo's Acceleration Experiment —

Hiroshi KAMADA, Takafumi KOJIMA, Yoshifumi JODAI and Satoshi YURA

Abstract

Derivation and integration are known as one of the most important mathematical tools. It is, however, difficult to use them or to understand the basic concept for the second-year students at the Takamatsu campus of KAGAWA KOSEN partly because they could not know their origins. This report describes an attempt to develop teaching materials, with hands-on demonstrations, to facilitate the learning and comprehension of derivation and integration. The attempt, including the result of introduction into a mathematics class, is based on an idea that Galileo's acceleration experiment is the sign of mathematical basic concepts of the calculus.

Keywords : Derivation, Integration, Galileo's Acceleration Experiment, Development of Teaching Materials

1. はじめに

（１）目標

本シリーズでは，香川高等専門学校高松キャンパス２年生が，微分・積分の基本的概念を習得することを目標としている．「(その１）ガリレオの斜面実験をひも解く」ことから始めて，目標を達成するために，(その１，２，３）のシリーズ教材開発を試みる．

その１：ガリレオの斜面実験をひも解く
その２：ガリレオ流の微分・積分を模索する
その３：その２から，現代風の微分・積分の基本的概念へ

今回の報告は，手順その１になっている．

（２）教材開発の背景

中学校の理科で，「力と運動」の理解のため，ガリレオの斜面実験が扱われている（参考文献（１））．そこでの考え方は，ニュートン力学との関連で処理する解法となっているが，ガリレオが実験した当時には，ニュートン力学はまだ成立していなかった．そこで，ガリレオ当時に戻って，その実験データのみを量として現象学的に解析する教材開発を試みた．

（３）本シリーズでの数理的処理

ガリレオの幾何学的説明または論証は我々には難しい．そこで，ある特定の図形的処理（参考文献（２））のみを用い，それ以外は中学校で学習しているデカルト座標（正規直交座標）とグラフを用いて数理的に処理する．

さらに，次元解析による単位換算に注目して「速さ（cm/s）×時間（s）＝移動距離（cm）」の計算では，長方形の縦を（cm/s），横を（s）としたとき，その積量は面積量に対応する．この面積量単位が cm となる処理の考え方（参考文献（３））に注目する（図１）．

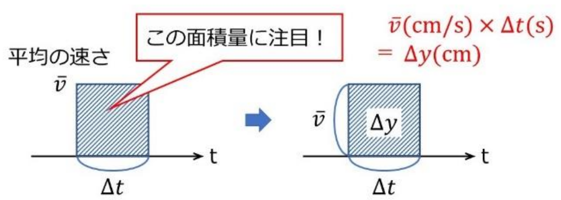


図１ 面積量とその単位

＊ 香川高等専門学校 名誉教授
＊＊ 香川高等専門学校 機械工学科
＊＊＊ 香川高等専門学校 機械電子工学科

2. シリーズ教材その１の授業実践

（１）実践状況

香川高専機械工学科２年生 41 名の特別活動（キャリア概論）の時間を 45 分（令和２年１月８日７限目）で実施した．教材のスライドをプロジェクタで投影して提示する授業を行った．スライドにはガリレオの斜面実験を著者らが再現した動画を含めた（図２）．実施後には質問・感想のアンケートと簡単な宿題を課した．

図２　ガリレオの斜面実験の再現

（２）アンケート結果と宿題の解答状況

実施後のアンケートによると，学生は好意的に受け入れているようである．中には，他の専門学科でも実施してはとの具申もあった．

宿題の解答状況については，計算式を省略し，答えだけを記述した学生が６名（約 15%），出題の意図が分からず誤答した学生が５名（約 12%）いた．

3. おわりに

著者らの授業経験では，微分・積分の基本的概念の理解不足から専門科目の学びで苦労している香川高専 2 年生がいるのも現状である．その対応策が，本シリーズ教材（その１，２，３）の活用であり，数学と専門科目の学びにおける溝を少しでも埋める試みでもある．

なお，手順その２「ガリレオ流の微分・積分を模索する」は，令和２年１月 22 日７限目に同じクラスで実施済みであり，次報で述べる予定である．

開発した教材（スライド）を付録Ａ（講義用），Ｂ（課題用）に示す．なお誌面の都合上，一部スライドについては，割愛し掲載している．

教材提供

教材とアンケート・宿題は付録に掲示している．授業等での活用または教材提供を希望される方は，著者まで連絡いただきたい．その際は今後の授業改善に資するため，学生へのアンケート・宿題を課して，著者までコピー提供等の協力をお願いする．

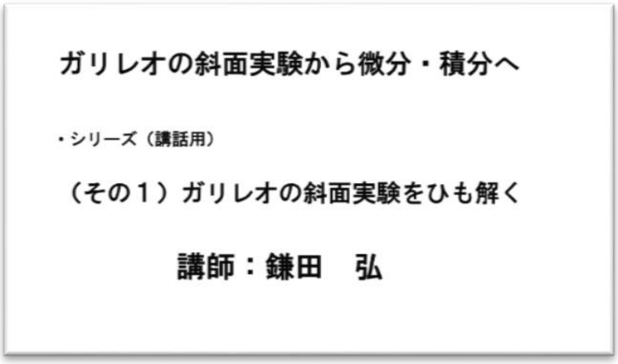
謝辞

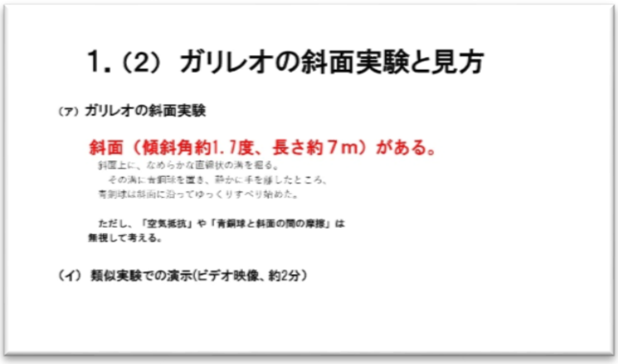
本教材での実践の場と時間を提供頂いた当時の機械工学科２年担任，坂本具償教授に感謝の意を表す．

参考文献

（１）　“整対ノート W 理科”，pp126–127，明治図書出版，2017
（２）　ガリレオ・ガリレイ，今野武雄・日田節次訳，“新科学対話（下）”，pp35–36，岩波文庫，1995
（３）　江口弘文，“理工系の基礎知識（science・iBOOK）”，pp208–209，SB クリエイティブ出版，2010

付録Ａ（講義用スライド）





本日の目標（3つの内1つ目）

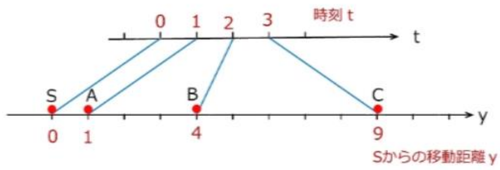
- **目標1：　時刻ｔと移動距離ｙの関数？**
- 目標２：　分数　Δｙ/Δｔを、平均の速さ$\bar{v}$という。
  平均の速さ$\bar{v}$のグラフは？
- 目標３：　瞬間の速さｖのグラフは？
  平均の速さ$\bar{v}$と瞬間の速さｖの関係は？

1.（2） ガリレオの斜面実験と見方

(ウ)斜面実験での用語の意味

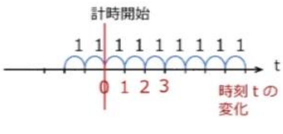
- **単位時間 １：**　水時計で測った小さい時間（約２秒）。
- **単位距離 １：**　スタート直後の単位時間「１」の間に
  青銅球が移動した距離（約58ｃｍ）。

1.（4） 時刻tと「点Sからの移動距離y」



1.（2）② 単位時間「1」の流れと「時刻tの変化」

- 座標軸をtとする。

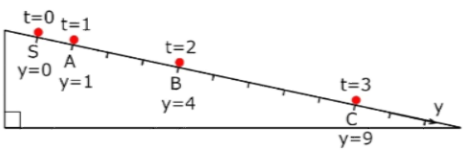


1.（5） 数表の作成

① 全体の移動距離yと「時刻tの二乗」

青銅球の位置の点	S	A	B	C
点Ｓからの移動距離ｙ（単位距離の整数倍で表示）	0	1	4	9
点Sからの経過時間の時刻ｔ（単位時間の整数倍で表示）	0	1	2	3
上の時間ｔの２乗	0	1	4	9

1.（3） ④実験の模式図（通過点Cの時）

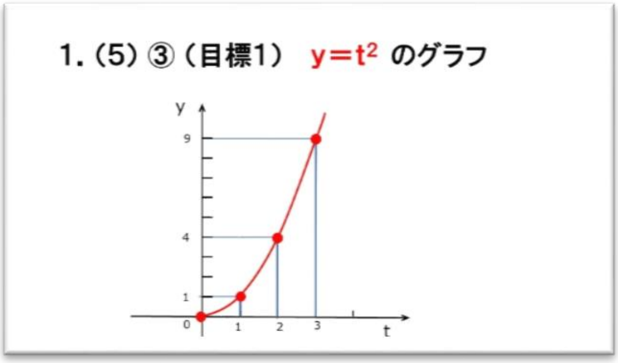


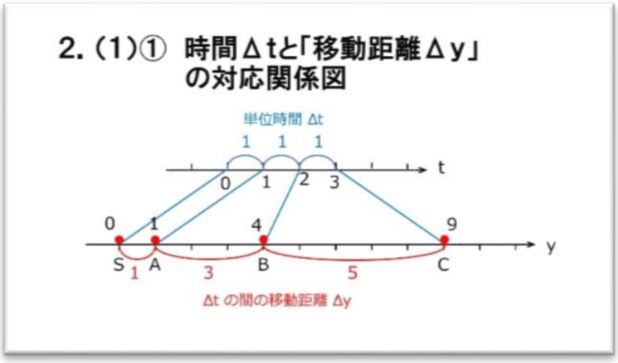
1.（5）② 全体の移動距離yと「経過時間tの二乗」の関係：

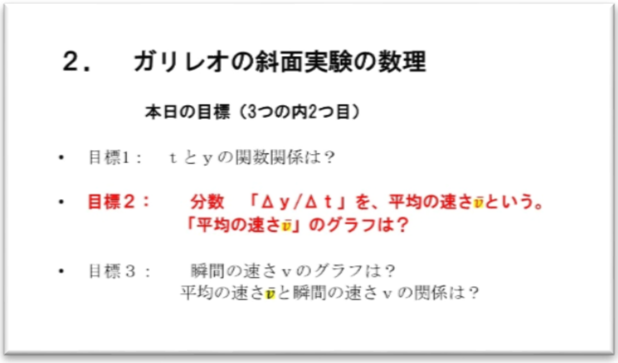
- 結論：

全体の移動距離ｙは、
「経過時間ｔの２乗」に比例する。

即ち、$y=t^2$

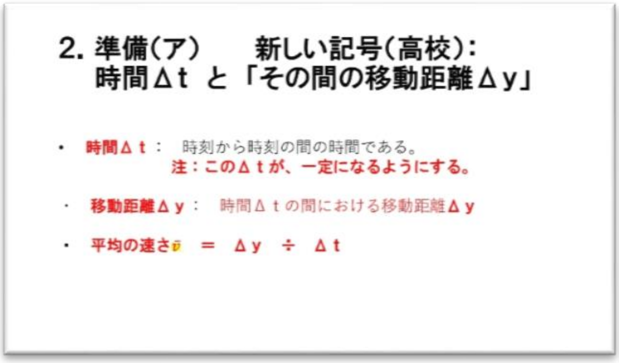


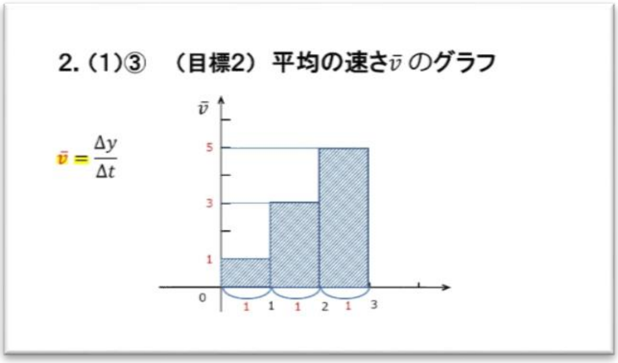


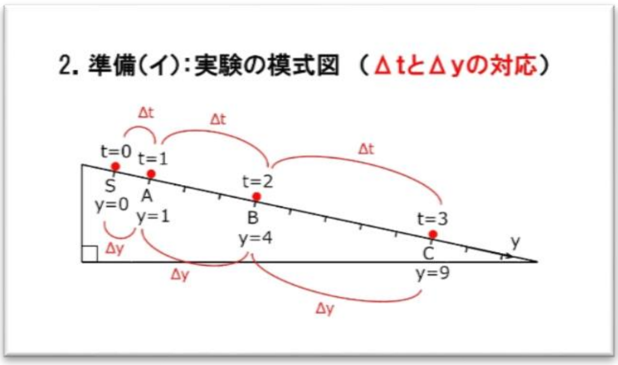


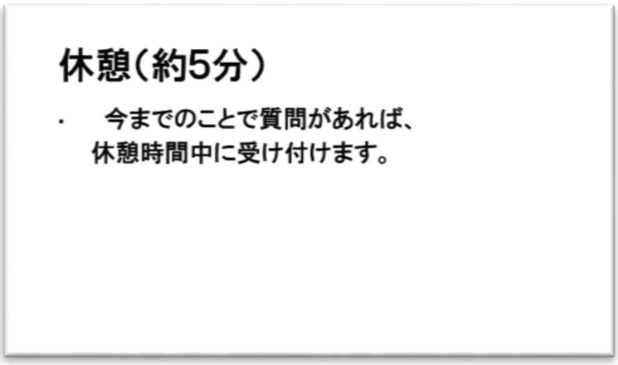

2.（1）② 平均の速さ$\bar{v}$ を求める数表

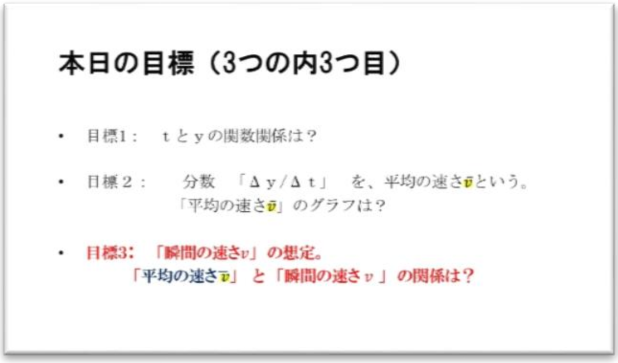
青銅球の位置の点	S		A		B		C
点Sからの移動距離y（単位距離の整数倍）	0		1		4		9
点Sからの経過時間の時刻t（単位時間の整数倍）	0		1		2		3
時刻と時刻の間の時間Δt（これを一定にする）		1		1		1	
一定時間 Δt 当たりの移動距離 Δy		1		3		5	
一定時間 Δt 当たりの平均の速さ$\bar{v}$＝Δy/Δt		1		3		5	

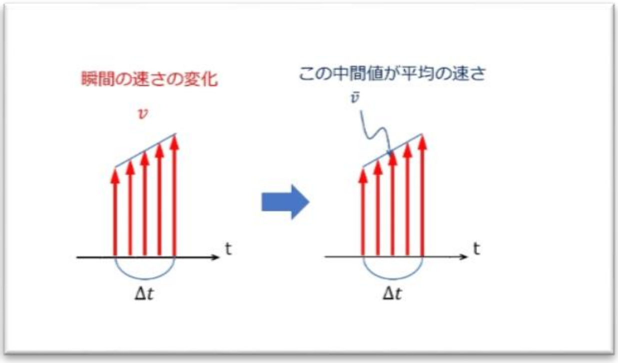


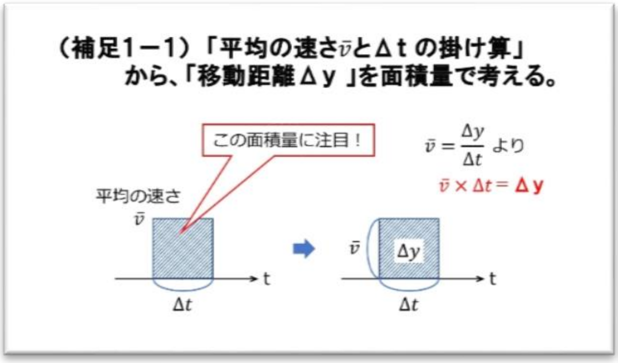


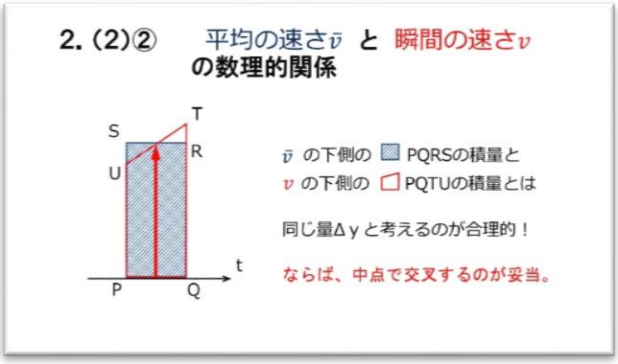




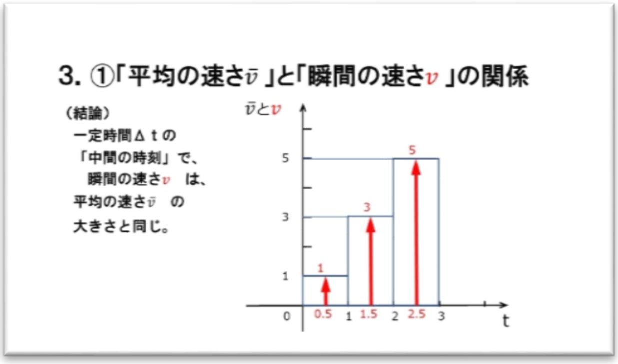

本日の目標（3つの内3つ目）
目標1：　ｔとｙの関数関係は？
目標２：　分数　「Δｙ/Δｔ」　を、平均の速さv̄という。
「平均の速さv̄」のグラフは？
目標3：「瞬間の速さv」の想定。
「平均の速さv̄」と「瞬間の速さｖ」の関係は？

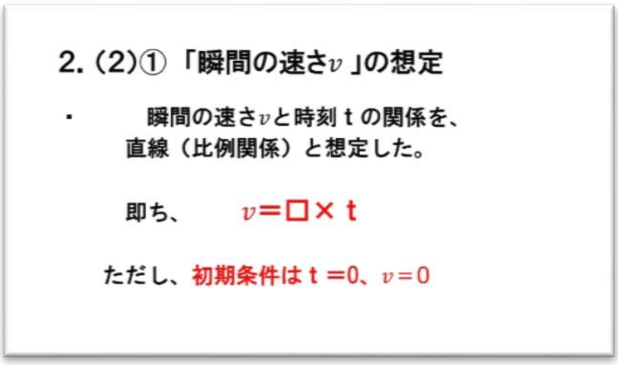

瞬間の速さの変化
v
t
Δt
この中間値が平均の速さ
v̄
t
Δt

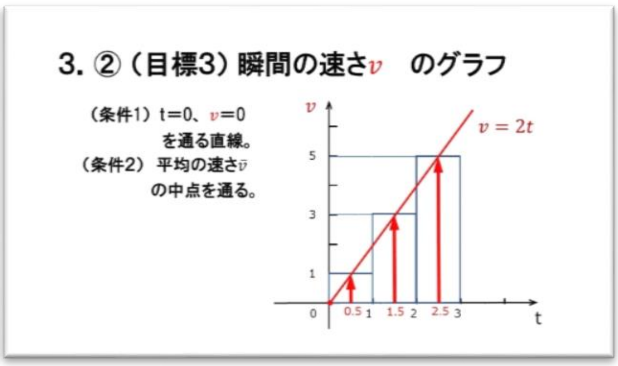

（補足1ー1）「平均の速さv̄とΔｔの掛け算」
から、「移動距離Δｙ」を面積量で考える。
この面積量に注目！
v̄ = Δy/Δt より
v̄ × Δt = Δｙ
平均の速さ
v̄
t
Δt
v̄
Δy
t
Δt


2.（2)②　平均の速さv̄　と　瞬間の速さv
の数理的関係
T
S
R
U
t
P
Q
v̄ の下側の PQRSの積量と
v の下側の PQTUの積量とは
同じ量Δｙと考えるのが合理的！
ならば、中点で交叉するのが妥当。


（補足1ー2）次元解析：
Δｙと平均の速さv̄、Δｔの関係
•名数とは、平均の速さv̄の単位　「ｃm/ｓ」　など。
Δｙ(cm)/ Δｔ(s) =v̄ (cm/s) より
Δｙ(cm)= v̄ (cm/s)×Δｔ(s)
重要：　(cm)= (cm/s)× (s)　が、名数の次元解析


3. ①「平均の速さv̄ 」と「瞬間の速さv 」の関係
（結論）
一定時間Δｔの
「中間の時刻」で、
瞬間の速さv　は、
平均の速さv̄　の
大きさと同じ。
v̄とv
5
3
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t


2.（2)①「瞬間の速さv 」の想定
瞬間の速さvと時刻ｔの関係を、
直線（比例関係）と想定した。
即ち、　v=□×ｔ
ただし、初期条件はｔ=0、v=0


3. ②（目標3）瞬間の速さv　のグラフ
（条件1）t=0、v=0
を通る直線。
（条件2）平均の速さv̄
の中点を通る。
v
v = 2t
5
3
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t

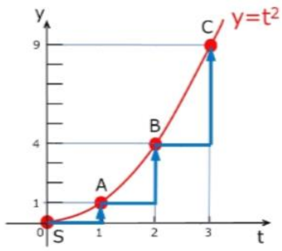
終わります。

- 疑問・質問等があれば、受付けます。

（その２：「ガリレオ流の微分」）への準備

- （補足2－1）：平均の速さ$\bar{v}$　の　図形的な意味
- （補足２－２）：　平均の速さ$\bar{v}$　の　グラフy=t^2 での図形的意味

（補足2－1）：平均の速さ$\bar{v}$の図形的な意味



（補足２－２）：　平均の速さ$\bar{v}$の
グラフy=t^{2}での図形的意味

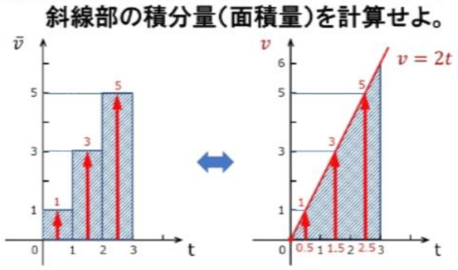
- (i)　0≦t≦1の時、Δt＝1、Δy＝1より、
  $\bar{v}$＝Δy÷Δt＝1　これは、**線分SAの傾き**
- (ii)　1≦t≦2の時、Δt＝1、Δy＝3より、
  $\bar{v}$＝Δy÷Δt＝3　これは、**線分ABの傾き**
- (iii)　2≦t≦3の時、Δt＝1、Δy＝5より、
  $\bar{v}$＝Δy÷Δt＝5　これは、**線分BCの傾き**

付録Ｂ（課題用スライド）

本日の話について、疑問・質問を書いて下さい。

本日の話について、感想を書いて下さい。

**（宿題）０≦t≦3の区間で、2つのグラフの
斜線部の積分量（面積量）を計算せよ。**



宿題の解答：計算式と答えを書け。

- ①　$\bar{v}$－ｔのグラフの場合
- ②　v－ｔのグラフの場合