（シリーズ）　ガリレオの斜面実験から微分・積分へ
―（その３）　現代風の微分・積分へのアプローチ―

鎌田　弘*　　小島　隆史**　　由良　諭***

Development of Assistant Tool for Learning Derivation and Integration through Galileo's Acceleration Experiment
— (Part 3) Approach to Modern Derivation and Integration —

Hiroshi KAMADA, Takafumi KOJIMA and Satoshi YURA

Abstract

The series of studies describe development of teaching materials to make a goal of modern derivation and integration basic concept through explanation of Galileo's acceleration experiment and exhibition of function graph under Cartesian coordinates. The teaching materials are named "Galileo's-like derivation and integration" because of find of derivation and integration basic concepts. The third report shows the approach to modern derivation and integration using development of previous series studies.

Keywords : Galileo and Descartes, Galileo's-like Derivation and Integration

1.　はじめに

1-1　目標

本シリーズは，高等専門学校２年生が，微分・積分の基本概念を習得することを目標としている．その目標を達成するために，その１～その３のシリーズ教材開発を試みた．

その１：ガリレオの斜面実験をひも解く[1]

その２：ガリレオ流の微分・積分を模索する[2]

その３：現代風の微分・積分へのアプローチ

本報告は，上記シリーズその３の教材開発についてである．

1-2　教材開発の概略

まず，本シリーズのその１，その２の概略を振り返っておく．本シリーズその１[1]：①ガリレオの斜面落下実験の測定値から，時間 t と移動距離 y の関数関係 $y=t^2$ に注目した．②測定データから計算した平均速度$\bar{v}$から，ガリレオの図形的解釈[3]により瞬間速度vを推定した．その２つを直交座標上の関数グラフで表現することにより，瞬間速度は関数 $v=2t$ となる．③移動距離 y についても，平均速度$\bar{v}$から計算した累積値と瞬間速度vから求めた積量（積分値という）の値が同じである．

本シリーズその２[2]：無限小操作を導入して，ガリレオの斜面実験の中に，微分・積分の基本概念の萌芽を見つけ，それをガリレオ流の微分・積分と名づけた．①時間区間［$t-h$，$t+h$］の平均速度$\bar{v}$と中間時点 t の瞬間速度vの関係を関数 $y=t^2$ グラフに関わる直線の傾きで捉え，いかなる h に対しても平均速度$\bar{v}$と瞬間速度vが等しくなることに着目した．このとき，$v=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ と$\bar{v}=\Delta y/\Delta t$ は同じ値で，これをガリレオ流の微分と呼ぶ．②移動距離についても，平均速度$\bar{v}$から計算した累積値 $y1$ と瞬間速度vから求めた積量（積分値）の値 y が，いかなる h に対しても同じ値となることに着目した．このとき，$y1=\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i\Delta t$ と $y=\int_0^3 v\,dt$ は同じ値で，これをガリレオ流の積分と呼ぶ．

本シリーズその３：ガリレオ流の微分・積分を現代風の微分・積分に繋げるアプローチが本報告である．学習内容は，デカルト座標での図解が可能な初等的関数を想定しており，ライプニッツやニュートンが初期にイメージした無限小と誤差の処理を念頭においた筆者の解釈である[4)−8)]．そのとき，無限小操作に伴う数理処理が，現代風の微分・積分ではガリレオ流の微分・積

* 香川高等専門学校 名誉教授
** 香川高等専門学校 機械工学科
*** 香川高等専門学校 機械電子工学科

分とは違ってくる．

1-3　本シリーズでの数理処理

直交座標上の関数グラフ$y=t^2$と$v=2t$を用い，ガリレオの斜面実験での物理量をグラフの図形量で置き換え，その計算で数理処理をする．特に現代風の微分・積分では，無限小操作に伴い誤差が発生するので，それが０に収束することを数理的と図形的に説明し，無限小解析に繋がる道筋とした．その道筋を数理式で示すと，以下の①，②になる．

①ガリレオ流微分計算式　$dy／dt＝\Delta y／\Delta t$（等式関係）から，現代風微分計算式　$dy／dt＝\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$（極限関係）へ．

②ガリレオ流積分計算式　$\int_0^3 vdt=\sum_0^3 \bar{v}_i\,\Delta t = \sum_0^3 v_i\,\Delta t$（等式関係)から，（ただし，区間$\Delta t$での平均速度$\bar{v}_i$は，中間時点での瞬間速度$v_i$に等しい．）現代風積分計算式　$\int_a^b vdt=\lim_{n\to\infty}\sum_a^b v_i\,\Delta t$　（極限関係）へ．

（ただし，区間Δtでの瞬間速度v_iは，左端時点t_iでのv_iである．）

1-4　図形処理における次元量変換（量変換）

次元解析に用いる式から，以下のように考えた．

①「速さ$\tilde{v}$（cm/s）＝移動距離Δy（cm）／時間Δt（s)」の計算では，移動距離Δy／時間Δtの比の値（$\Delta y/\Delta t$）を微分計算という．このときΔyを，yとtのグラフでは１次元量（長さ量）として扱っている．

②「速さ$\tilde{v}$（cm/s）×時間Δt（s）＝移動距離Δy（cm）」の計算では，移動距離Δyの総和（$\Sigma\Delta y$）を積分計算という．このときΔyを，$\tilde{v}$とtのグラフでは２次元量（面積量）として扱っている．

③このΔyの扱い方①と②を，１次元量と２次元量間の次元量変換（量変換）と呼ぶ．

2. シリーズその３（本報告）の授業計画（案）

高等専門学校２年生クラスの１時間（５０分）での授業計画案である．

2-1　実施方法（案）

（１）授業用教材スライドの要点プリントを学生に配布する．教材スライドをプロジェクターで投影し，それを説明する方法は一斉授業形式で行う．

（２）授業後には疑問・質問，感想等のアンケートを行う．

（３）授業内容の理解程度を調べるため，宿題１（微分），宿題２（積分）の形成的評価問題を課す．

2-2　授業用教材スライド（参照：巻末の（付録Ⅰ）スライドＡと（付録Ⅱ）スライドＢ）

今回の本論はスライドＡであり，前回の復習用はスライドＢである．学生の現状から復習が必要ならば，復習用を授業の初めに利用することを考えた．

授業の流れの大筋は，ガリレオ流の微分・積分計算から現代風の微分・積分計算への移行であり，以下の４つの図の流れで示す．

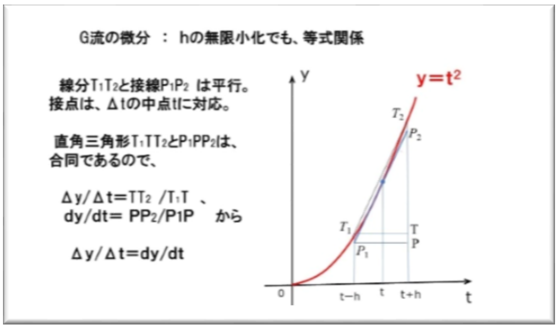


図１　ガリレオ流の微分計算

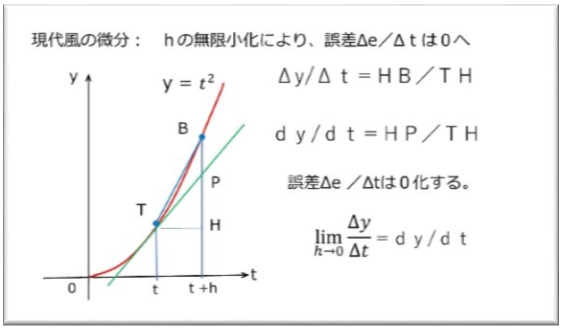


図２　現代風の微分計算

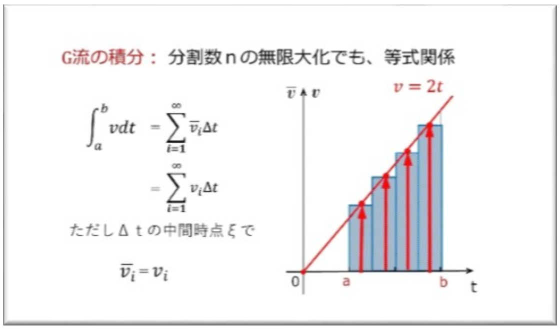


図３　ガリレオ流の積分計算

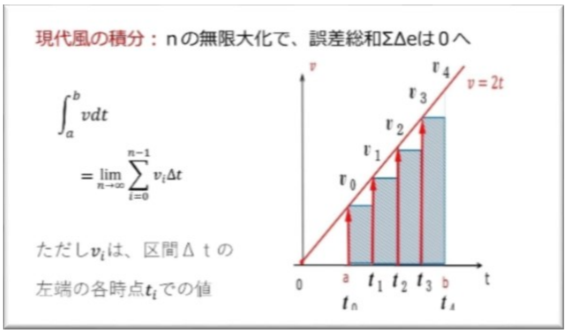


図４　現代風の積分計算

2-3　微分・積分の基本公式の導出
　導出の仕方として何通りか考えられる．代表的なのは，高校の教科書等の証明法なので，掲載は省略する．他方スライドＡで，簡単な導出法を提案した．

2-4　授業後のアンケートと宿題の案を示す（参照：本報告の付録Ⅲ）
（１）授業後アンケートの疑問・質問，感想等は，学生の自由記述である．
（２）授業内容の理解程度を調べる宿題１（微分），宿題２（積分）を形成的評価問題として課し，後日回収して評価をする．

３．おわりに

　筆者らの授業経験では，微分・積分の基本概念の理解不足から専門科目の学びで苦労している高専２年生がいるのが現状である．その対応策が，本シリーズ教材（その１，２，３）であり，数学と専門科目の学びにおける橋渡しになればとの試みである．
　ガリレオの斜面実験[3]と思索[9]をスタートとして，そこにガリレオ流の微分・積分の萌芽を探り[2]，それを現代風の微分・積分（教科書で習う内容）に繋げていく試みが今回の報告である．それにより，微分・積分の基礎概念の理解を促進することを目指した．
　ガリレオとデカルトの出会いを仮想し，ガリレオの斜面実験のデータを直交座標上の関数グラフで再構成し，それを解析的に処理する教材の開発であった．このとき，ガリレオ流の微分・積分を経由することが，現代風の微分・積分の基本概念に「改めて気付く」ためには有効であった．改めて，ガリレオ流の微分・積分と現代風の微分・積分の違いを述べる．
（１）ガリレオ流微分計算式　$dy/dt = \Delta y/\Delta t$（等式関係）から，$\Delta y/\Delta t = dy/dt + \Delta e/\Delta t$，$\Delta e/\Delta t \to 0$（$\Delta t \to 0$）を経て現代風微分計算式　$dy/dt = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$（極限関係）へ．
（２）ガリレオ流積分計算式　$\int_0^3 vdt = \sum_0^3 \bar{v}_i \Delta t = \sum_0^3 v_i \Delta t$（等式関係）から，（ただし，区間$\Delta t$での平均速度$\bar{v}_i$は，中間時点での瞬間速度$v_i$に等しい．）現代風積分計算式　$\int_a^b vdt = \lim_{n\to\infty} \sum_a^b v_i \Delta t$（極限関係）へ．（ただし，区間$\Delta t$での瞬間速度$v_i$は，左端時点$t_i$での$v_i$　である．）
　この（1），（2）の過程で，微分・積分の基本公式の導出について，従来の教科書の証明法とは異なる数理的方法を見つけたのは，思わぬ気づきであった．また，微分・積分の基本公式を図解的に説明できる方法及び簡単な微分方程式を解く過程を図解的に説明できる方法にも関心が広がった．それらについては，シリーズ後の雑感として別の機会に報告する予定である．

＜授業用教材スライドの提供＞
　授業用教材スライドは，巻末の（付録Ⅰ）スライドＡと（付録Ⅱ）スライドＢに掲載している．授業等での活用を希望される方は，筆者までご連絡をいただきたい．

参考文献
１）鎌田，小島，上代，由良，“(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ―（その１）ガリレオの斜面実験をひも解く－”，香川高等専門学校研究紀要，Vol.11，pp.7-12，2020

２）鎌田，小島，上代，由良，“(シリーズ) ガリレオの斜面実験から微分・積分へ―（その２）ガリレオ流の微分・積分を模索する－”，香川高等専門学校研究紀要，Vol.12，pp.7-14，2021

３）今野武雄・日田節次訳，“ガリレオ・ガリレイ，新科学対話（下）”，pp.35，36，第 47 図，岩波文庫，1937

４）吉田信夫，“ニュートンとライプニッツの微分積分”，技術評論社，2013

５）中野猿人訳・注，“アイザック・ニュートン　プリンシピア－自然哲学の数学的原理－”，　第Ⅰ編　物体の運動，第Ⅰ章　補助定理２，３，講談社，2019

６）中村幸四郎，“近世数学の歴史－微積分の形成をめぐって－”，日本評論社，1980

７）高木貞治，“解析概論（改訂第三版）”，岩波書店，1966

８）大田邦郎，“読むだけ微積分”，学研，2009

９）今野武雄・日田節次訳，“ガリレオ・ガリレイ，新科学対話（上）”，岩波文庫，1948

（付録Ⅰ）スライドＡ（授業用教材　本論の章）

ガリレオの斜面実験から微分・積分へ

シリーズその３：現代風の微分・積分の計算へ

（本論の章）

～無限小量の処理を通して～

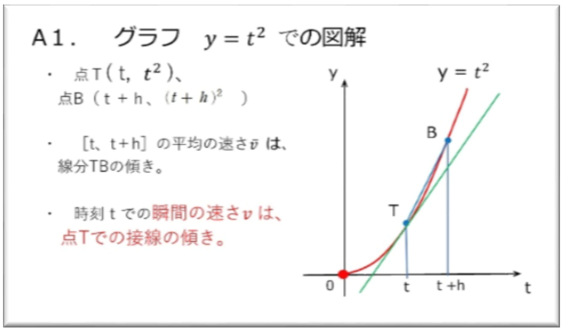
講師：　鎌田　弘

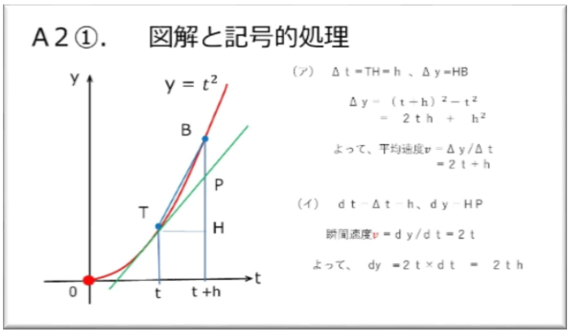
A.　「現代風の微分」について

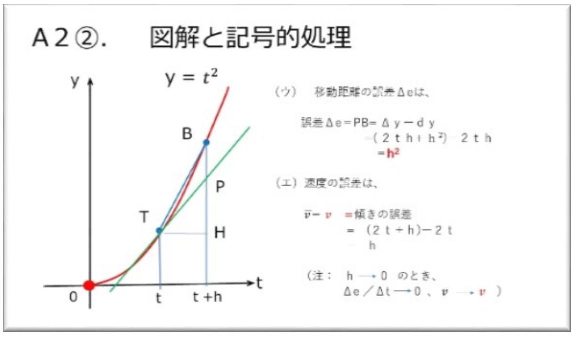
A１.　グラフ$y=t^2$　での図解

A２.　図解と記号的処理　①，②

A３.　「現代風の微分」の結論







A３.　「現代風の微分」の結論

（１）平均速度$\bar{v}$

$\Delta y/\Delta t = \{ (t+h)^2 - t^2 \} / h = 2t + h$

（２）瞬間の速度v

$dy/dt = 2t$

（３）　$\Delta y/\Delta t = dy/dt + h$　から

$\lim_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = dy/dt$　、これを　$\dot{y} = v$　と書く。

B.　「現代風の積分」について

B１.　微分・積分の基本公式の導出

B２.「簡易な区分求積」での収束

（ア）無限小量誤差の無限個和が、０に収束する

（イ）簡易な区分求積の無限個和が、有限値に収束する

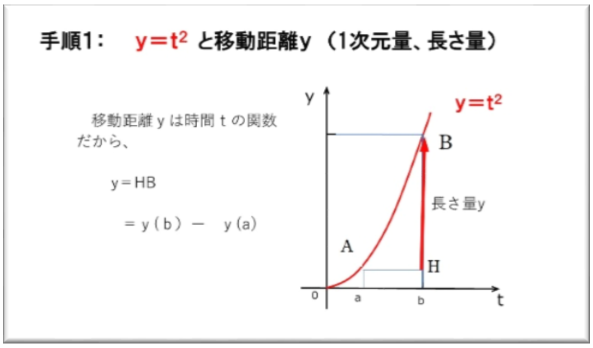
B１.　微分・積分の基本公式の導出

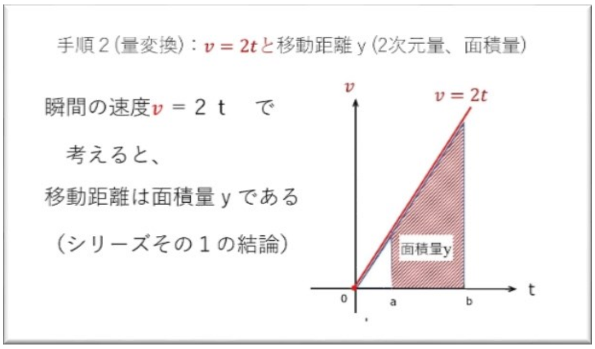
導出の手順

手順1：　y＝t^2 と移動距離y （1次元量、長さ量）

手順２(量変換)：　$v=2t$と移動距離ｙ(2次元量、面積量)

結論：　微分・積分の基本公式





結論：　微分・積分の基本公式

移動量を面積量に量変換したので、yを $\int_a^b v\,dt$ と書く

手順１と２から、次式の結果を得る。

$$y(b) - y(a) = \int_a^b v\,dt$$

ただし、現代風の微分から $v = \dot{y}$ である。

結論の使用：　微分・積分の基本公式の使用

$$\int_a^b v\,dt = [y]_{t=a}^{t=b} = y(b) - y(a)$$

ただし $v = \dot{y}$

使用例： $v = \dot{y} = 2t$ のとき、 $y = t^2$ だから

$$\int_3^6 2t\,dt = [y(t)]_{t=3}^{t=6} = [t^2]_{t=3}^{t=6} = 36-9 = 27$$

B２．「簡易な区分求積」に係る収束性

「簡易な区分求積」に係る、収束の性質を考える。

以下の２つである。

（ア）「無限小量誤差の無限個の和」が、０に収束する。

（イ）「簡易な区分求積の無限個の和」が、有限値に収束する。

B２．　「簡易な区分求積」に係る収束性

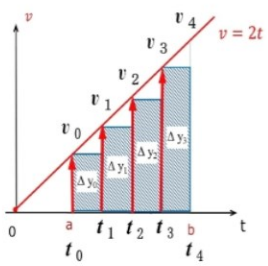
（ア）　「無限小量誤差の無限個の和」が、
０に収束する。
それを、具体例１，２の図解で説明する。

注：　この感覚は、我々の日常感覚では理解できない。
「塵も積もれば山となる」の諺に反するからである。

例１：　近似値ｙ(4)の図示　（４等分割（n＝４）の場合）

$\Delta t = h = (b-a)/4$、

$$y(4) = \sum_{i=0}^{3} v_i \Delta t = \sum_{i=0}^{3} \Delta y_i$$



例１：　近似値y(4)の式表示　（ｎ＝４の場合）

$$y(4) = v_0 \times h + v_1 \times h + v_2 \times h + v_3 \times h$$

ただし、 $v_i = v(t_i)$ 、 t_i は　Δｔの左端の時点

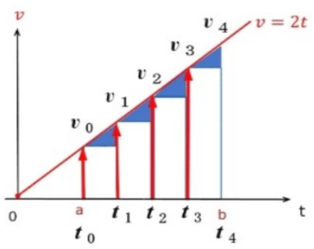
（注：　y(4)を、直接は計算しない。）

例１：　誤差 $E(4)$ の図示　（n=4の場合）

Δe_0　Δe_1

Δe_2　Δe_3

の総和E(4)

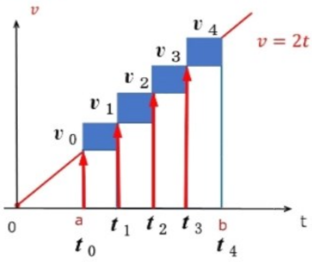


例１：　ニュートン的誤差F(4)の図示（n=4の場合）

Δf_0　Δf_1

Δf_2　Δf_3

の総和F(4)



例１の誤差F(4)の処理：　微小誤差Δfを右端に一括集約する。

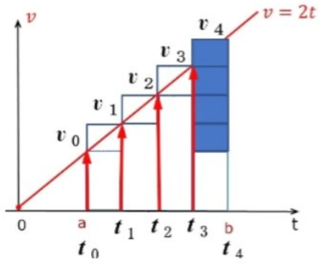
誤差F(4)

$=(v_4 - v_0)\times h$

$=(v(b)-v(a))\times h$

このとき、

0≦E(4 ≦F(4)



例１：　ニュートン的誤差F(４)の計算（n=4の場合）

誤差F(４)＝２×E(４)

$= (v_1 - v_0)\times h + (v_2 - v_1)\times h + (v_3 - v_2)\times h + (v_4 - v_3)\times h$

$= (v_4 - v_0)\times h$

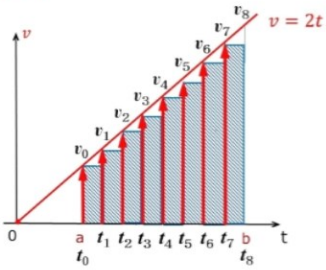
$= (v(b) - v(a)) \times (b-a)/4$

例２：　近似値ｙ(8)の図示　(ｎ＝8の場合)

$\Delta t = h = (b-a)/8$

$y(8) = \sum_{i=0}^{7} v_i \Delta t$

$= \sum_{i=0}^{7} \Delta y_i$



例2：　近似値y(8)の式表示（ｎ＝８の場合）

$y(8) = v_0 \times h + v_1 \times h + v_2 \times h + \cdots$

$\cdots + v_6 \times h + v_7 \times h$

（注：　y(８)を、直接は計算しない。）

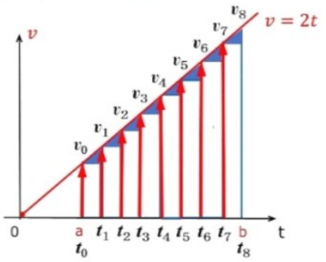
例２：　誤差E(8)の図示（n＝8の場合）

$\Delta e_0 \quad \Delta e_1$

から

$\Delta e_6 \quad \Delta e_7$

の総和E(8)



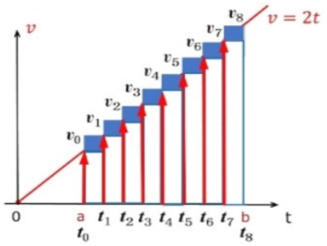
例２：　ニュートン的誤差F(８)　(ｎ=8の場合)

$\Delta f_0 \quad \Delta f_1$

から

$\Delta f_6 \quad \Delta f_7$

の総和F(8)



例２の誤差F(８)：　微小誤差Δfを右端に一括集約する。

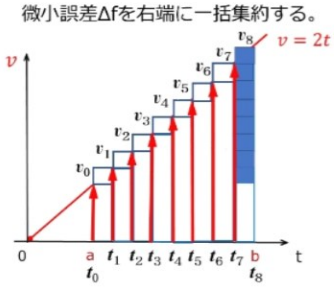
誤差F(8)

$=(v_8 - v_0)\times h$

$=(v(b)-v(a))\times h$

このとき、

$0 \leqq E(8) \leqq F(8)$



例２：　ニュートン的誤差F(８)　(n=8の場合)

誤差F(８)＝　２×E(8)

$= (v_1 - v_0)\times h + (v_2 - v_1)\times h$

$\cdots + (v_7 - v_6)\times h + (v_8 - v_7)\times h$

$= (v_8 - v_0) \times h$

$= (v(b) - v(a)) \times (b-a)/8$

B２(ア)結論：「無限小量誤差の無限個和E(n)」は０に収束

誤差F(ｎ)＝ ２×E(n)

$= (v_1 - v_0)\times h + (v_2 - v_1)\times h + \cdots + (v_n - v_{n-1})\times h$

$= (v_n - v_0) \times h$

$= (v(b) - v(a)) \times (b-a)/n$

今、$n \to \infty$とすると、 $F(n) \to 0$から、$E(n) \to 0$

Ｂ２．　「簡易な区分求積」に係る収束性

（イ）「簡易な区分求積での無限個の和」が、有限値に収束する。

それを、B2(ア) の具体例１，２の図解を参考にして説明する。

***B2* (イ) ①：近似値ｙ(ｎ)の計算（ ｎ等分割に一般化）**

$h = \Delta t = (b-a)/n$ 、

$v_i = v(t_i)$　ただしt_iは、区間Δｔの左端の値

$y(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_i = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \cdots + \Delta y_{n-1}$

$= v_0 \times h + v_1 \times h + \cdots + v_{n-1} \times h$

$= \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t$　　（注：これを、直接は計算しない）

B２(イ)②：「簡易な区分求積での無限個和」の収束性

$$\int_a^b v\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta e_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t + E(n)$$

ここで、n → ∞のとき、E(n) → 0である。

B２(イ)結論：「簡易な区分求積」の極限的定義

$$\int_a^b v dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t$$

ただしv_iは、区間Δｔの左端の各時点t_iでの値で良い。

（注：　左端の各時点t_iで考える「簡易な区分求積」で積分式化すると、立式の思考が簡易になる。）

終了（本論の章）

（付録Ⅱ）スライドＢ（授業用教材　復習 S2 の章）

ガリレオの斜面実験から微分・積分へ

シリーズその３　　「現代風の微分・積分」の計算へ

（S2復習の章）　シリーズその２の復習（S2）

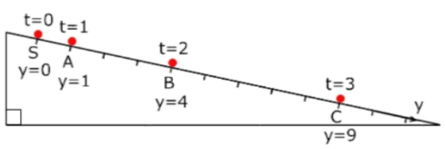
講師：　鎌田　弘

シリーズその２の復習（S2）

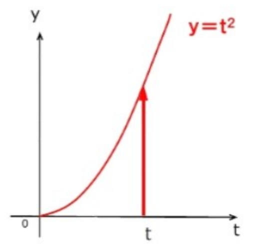
S2①:　ガリレオ流（G流）の微分計算

S2②:　ガリレオ流（G流）の積分計算

S1：実験、及び「時間tと移動距離yの測定」



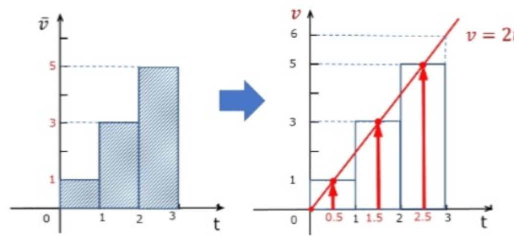
移動距離yは経過時間tの2乗に比例する



平均の速さ$\bar{v}$の計算

青銅球の位置の点	S	A	B	C
点Ｓからの移動距離ｙ（単位距離の整数倍）	0	1	4	9
点Sからの経過時間の時刻ｔ（単位時間の整数倍）	0	1	2	3
時刻と時刻の間の時間Δｔ（これを一定にする）		1	1	1
一定時間 Δｔ 当たりの移動距離 Δｙ		1	3	5
一定時間 Δｔ 当たりの平均の速さ$\bar{v}$＝Δｙ/Δｔ		1	3	5

「平均の速さ$\bar{v}$」から「瞬間の速さ v」 を推定

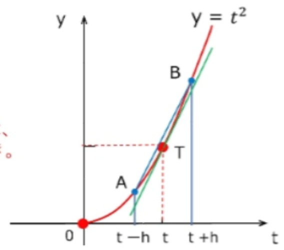


S2①導入：　ガリレオ（G）流の微分の図形的意味：
物理量$\bar{v}$とvを、$y = t^2$ での図形量で示す。

点Ｔ(t, t^2)で考える。

・ 平均の速さ $\bar{v}$ の値は、線分ABの傾き。

・ 瞬間の速さ v の値は、点T における接線の傾き。



S2①結論：　G流の微分計算

（１）平均速度$\bar{v}$の計算（線分ABの傾き＝Δy /Δt）

$\bar{v}$ ＝Δy /Δt ＝ { (t+h)² － (t−h)² } / (2 h)

＝ 2t

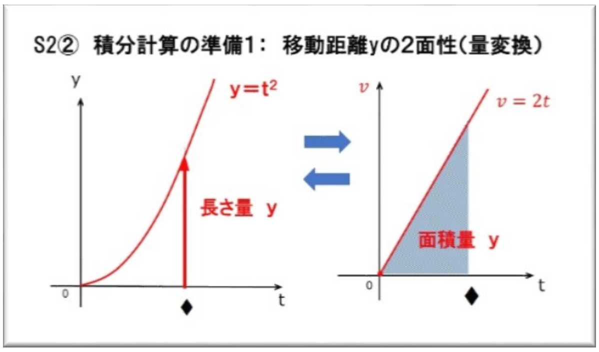
（２）瞬間速度 v の定義（接線の傾きで、ｄｙ/ｄｔと書く。）

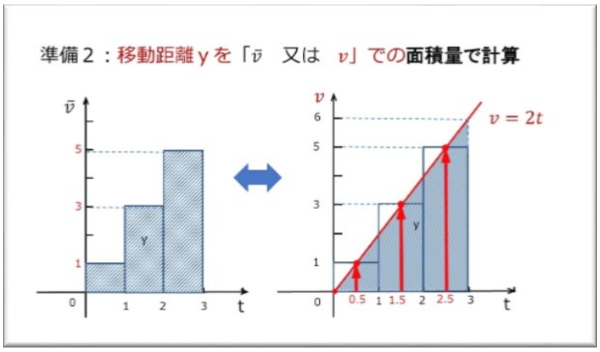
接線は、図形的には線分ABと平行になっている。

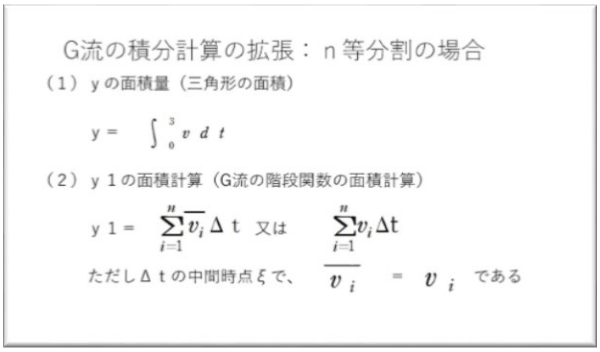
よって、v＝２ｔとなる。

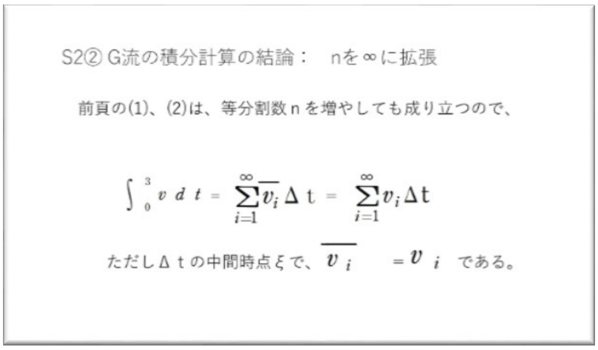
（３）このとき、v＝$\bar{v}$　の等式が常に成り立っている。

すなわち、　dy/dt= Δy /Δt









（付録Ⅲ）アンケートと宿題の内容と形成的評価等

１．アンケート

（１）疑問・質問，（２）感想等は，学生の自由記述である．

２．宿題の内容と形成的評価

（１）宿題１：t の区間［t, $t+h$］で，グラフ $y=t^2$ を考える．点T（t, t^2），点B（$t+h$，$(t+h)^2$）として，図形的に線分TBに注目する．

①増分 Δt を h とする．増分 Δy を t と h で表せ．

②線分TBの傾き（図形量）に対応する平均の速さ $\bar{v}$（物理量）を考える．$\bar{v} = \Delta y/\Delta t$ を計算し，t と h で表せ．

③$h \to 0$ として，時刻 t での瞬間速度 v を t で表せ．（現代風の微分法）

④点Tで，瞬間速度 v は図形的に何を意味するか．

⑤グラフ $y=t^2$ 上の点Tで，上の④の意味を示す直線を描け．

（宿題１の解答）採点集計表（正解○，半正解△，不正解×）

	○	△	×	計
①				
②				
③				
④				
⑤				

（２）宿題２：グラフ $v=2t$ について，次の問に答えよ．

① t の区間［0, t］を４等分割したとき，微小区間 Δ の長さは 1/4 となる．このとき，t の各分割区間の左端点の時刻を考える．「0, t/4, □, □, t」の □を t で表せ．

②①の t の各分割区間の左端点に対する瞬間速度 v の値を考える　v の値は，「0, t/2, □, □, $2t$」となる．□を t で表せ．このとき，各微小区間 Δt における各微小移動量 Δy の計算は，$\Delta y = v(t) \times \Delta t$ で計算する．

③瞬間速度 v での移動距離 $\int_0^t v\,dt$ と，その近似値（$\Sigma\,\Delta y$）との誤差Eを考える．このとき，0≦誤差E≦誤差Fとなる誤差Fを，授業時の要領で図形的に考えて計算し，h で表せ．

④　今，t の区間［0, t］を n 等分割してから，そこで操作 $n\to\infty$ をすると，誤差 $F(n)$ 及び誤差 $E(n)$ が収束する値をいえ，その結果，$\int_0^t v\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t$ となる．（現代風の積分計算）

⑤　④から，「微分・積分の基本公式」が導出される．

それは，以下である．

$\int_0^t v dt = y(\mathrm{t}) - y(0)$　である．ただし，$\mathrm{d}y／\mathrm{d}t = v$

である．「微分・積分の基本公式」を利用して，$\int_0^t 2t dt$

を計算せよ．

（宿題２の解答）採点集計表（正解〇，半正解△，不正解×）

	〇	△	×	計
①				
②				
③				
④				
⑤				