ローレンツゲージ場の $0^{\pm}$ 成分

福間一巳*

The $0^{\pm}$ Components of Lorentz Gauge Fields in Poincaré Gauge Theory of Gravity

Kazumi FUKUMA

Abstract

The Lagrangian of Poincaré gauge theory is fourth degree in Lorentz gauge fields. It may be possible that some componnents have non-zero vaccum expected values. As a preliminary examination, in the case which Lorentz gauge fields are dominant, we investigate the energy of $0^{\pm}$ components of Lorentz Gauge Fields. It is found that i) no propagating $0^{\pm}$ modes exist and ii) vaccum expected values of $0^{\pm}$ are zero when the mass terms of $0^{\pm}$ components exist.

Keywords: Poincaré gauge theory, Lorentz gauge field, Vaccum expected value

1　はじめに

ポアンカレゲージ理論 [1, 2] は，局所対称性として，推進変換，ローレンツ変換を持つゲージ理論である．局所対称性を保証する場として，四脚場とローレンツゲージ場が導入され，一般的に定式化されている．そのため，ゲージ場のラグランジュアン密度は宇宙項を別として 10 個のパラメータを含む．この理論は多くの伝播モードを含みうる．伝播モードの弱場近似での研究は多くの研究者によって行われている．伝播モードがタキオンでなく，古典的エネルギーが正定値である条件や伝播関数の留数を調べモードのノルムが正定値である条件が弱場近似で調べられている．その結果は，ローレンツゲージ場が質量項をもつ場合については，矛盾しない結果が得られている [3, 4, 5]．ローレンツゲージ場が質量項を持たない場合は，互いに矛盾する結果が発表されていたが [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]，より弱い条件で，慎重な扱いにより可能な理論のリストが作成された [13]．ローレンツゲージ場のある成分が質量項を持ち，他の成分が質量項を持たない場合は，不十分な扱いがあるのみである．いずれにせよ，これらの研究により理論のパラメータにいくつかの制限が付くが，多くのパラメータが未定のまま残っている．

ポアンカレゲージ理論のラグランジュアン密度にはローレンツゲージ場について 4 次の項を含む．そのため，ローレンツゲージ場が真空期待値を持つ可能性がある．予備的な研究として，四脚場がローレンツゲージ場に比べ無視できるという仮定のもと，回転対称な成分，$0^{\pm}$ 成分について，真空期待値を持ちうるかどうかを調べることを目的とする．ローレンツゲージ場の方程式と正準エネルギーを調べ，他の論文の結果と合わせ結論を導く．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では，ポアンカレゲージ理論のラグランジュアン密度，場の方程式などを示し，理論の定式化を行う．第 3 節で

*香川高等専門学校 詫間キャンパス 情報工学科

は，場の方程式，エネルギーから $0^{\pm}$ 成分の真空期待値を解析し，パラメータの制限を調べる．第 4 節では，これまでの研究結果を考慮し，可能な理論に関し議論する．第 5 節で結論をまとめる．

2　ポアンカレゲージ理論

ポアンカレゲージ理論は，推進変換とローレンツ変換を局所化したゲージ理論であり，四脚場 $b_k{}^{\mu}$ [1]，ローレンツゲージ場 $A^{kl}{}_{\mu}$ が導入される．本研究での理論の定義は文献 4) と同じである．4 脚場とローレンツゲージ場の 1 階微分について高々 2 次で，空間反転に対し不変であり，宇宙項のない，最も一般的な作用積分は

$$
\begin{aligned}
I &= \int d^4x(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_G), && (1)\\
\mathcal{L}_M &= bL_0(q^A,\ D_k q^A), && (2)\\
\mathcal{L}_G &= b(\alpha\ {}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm} + \beta\ {}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k \\
&\quad +\gamma\ {}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k + a_1 A_{klmn}A^{klmn} \\
&\quad +a_2 B_{klmn}B^{klmn} + a_3 C_{klmn}C^{klmn} \\
&\quad +a_4 E_{kl}E^{kl} + a_5 G_{kl}G^{kl} + a_6 F^2 \\
&\quad +aF) && (3)
\end{aligned}
$$

で与えられている[2]．α，β，γ，a と a_i $(i = 1 \sim 6)$ は任意のパラメータである．物質場 $q^A(x)$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ のラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_M$ は，特殊相対論での物質場のラグランジュアン密度 $L_0 = L_0(q^A,\ q^A{}_{,\mu})$ において物質場の微分 $q^A{}_{,\mu}$[3] を共変微分

$$
D_k q^A = b_k{}^{\mu}\left(q^A{}_{,\mu} - \frac{i}{2}A^{kl}{}_{\mu}(S_{kl}q)^A\right) \qquad (4)
$$

に置き換えたものである．ここで，$S_{kl}{}^A{}_B$ は物質場 q^A のローレンツ変換の無限小生成演算子である．また，Dirac 場に関しては γ^{μ} を γ^k に，スカラー場，ベクトル場については $\eta_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu} = \eta_{kl}b^k{}_{\mu}b^l{}_{\nu}$ に置き換えている．さらに，作用積分に不変体積要素 $b\,d^4x$ が現れるようにラグランジュアン密度に $b = -\det b_{k\mu}$ を含む．ただし，4 脚場 $b_k{}^{\mu}$ の双対場 $b_{k\mu}$ は

$$
b_{k\mu}b^{l\mu} = \delta_k{}^l,\ b_{k\mu}b^{k\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} \qquad (5)
$$

[1] 局所的な推進変換は一般座標変換である．スピノール場はローレンツ変換の既約 2 価表現であるが，一般座標変換の既約表現でないことが知られている．そこで，各点で接空間を考え，その接空間でスピノール場を定義する．各点での接空間 (ラテン文字の添え字で表す) と座標空間（ギリシャ文字の添え字で表す）を結ぶものとして 4 脚場 $b_k{}^{\mu}$ が導入される

[2] ラテンの添え字 $k, l, m, \cdots$ は，ミンコフスキー計量 $(\eta_{kl}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ と $(\eta^{kl}) = (\eta_{kl})^{-1}$ を用いて上げ下げをする．この論文では主に論文 4) の記号法を用いる．

[3] q^A の微分 $\partial q^A/\partial x^{\mu}$ を $\partial_{\mu}q^A$ または $q^A{}_{,\mu}$ と略記する．

で定義される．ゲージ場のラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_G$ は，4 脚場の強さ，ローレンツゲージ場の強さ[4]

$$
\mathcal{C}_{klm} = 2b_{k\nu}b_{[l}{}^{\mu}b_{m]}{}^{\nu}{}_{,\mu} - 2A_{k[l\mu}b_{m]}{}^{\mu}\ , \qquad (6)
$$

$$
F_{klmn} = 2b_{[n}{}^{\mu}b_{m]}{}^{\nu}(A_{kl\nu,\mu} - A_{pk\mu}A^p{}_{l\nu}) \qquad (7)
$$

の規約成分

$$
\left\{
\begin{aligned}
{}^T\mathcal{C}_{klm} &= \mathcal{C}_{(kl)m} \\
&\quad -\tfrac{1}{3}(\eta_{kl}{}^V\mathcal{C}_m - \eta_{m(k}{}^V\mathcal{C}_{l)})\ , \\
{}^V\mathcal{C}_k &= \mathcal{C}^l{}_{lk}\ , \\
{}^A\mathcal{C}_k &= \tfrac{1}{6}\epsilon_{klmn}\mathcal{C}^{lmn}\ , \\
A_{klmn} &= F_{klmn} - F_{kmln} + F_{knlm} \\
&\quad +F_{lmkn} - F_{lnkm} + F_{mnkl}\ , \\
B_{klmn} &= D_{klmn} + D_{mnkl} \\
&\quad -D_{knlm} - D_{lmkn}\ , \\
C_{klmn} &= D_{klmn} - D_{mnkl}\ , \\
E_{kl} &= 2F_{[kl]}\ , \\
G_{kl} &= 2F_{(kl)} - \tfrac{1}{2}\eta_{kl}F\ , \\
F &= F_{kl}{}^{kl}
\end{aligned}
\right. \qquad (8)
$$

で与えられている[5]．ただし，ϵ_{klmn} はミンコフスキー時空での完全反対称テンソルであり，$\epsilon_{0123} = 1$ とし，D_{klmn} と F_{kl} は

$$
\begin{aligned}
D_{klmn} &= F_{klmn} - \frac{1}{2}(\eta_{km}F_{ln} \\
&\quad +\eta_{ln}F_{km} - \eta_{lm}F_{kn} - \eta_{kn}F_{lm}) \\
&\quad + \frac{1}{6}(\eta_{km}\eta_{ln} - \eta_{lm}\eta_{kn})F\ , && (9)\\
F_{kl} &= F_{kml}{}^m && (10)
\end{aligned}
$$

である．局所推進変換（一般座標変換）と局所ローレンツ変換は

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x^{\mu} \to x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)\ , \\
& q^A(x) \to \\
& \qquad q^{A\prime}(x') = q^A(x) + \tfrac{i}{2}\omega^{kl}(x)(S_{kl}q(x))^A\ , \\
& b_k{}^{\mu}(x) \to \\
& \qquad b_k{}^{\mu\prime}(x') = b_k{}^{\mu}(x) + \partial_{\nu}\epsilon^{\mu}(x)b_k{}^{\nu}(x) \\
& \qquad\qquad + \omega_k{}^l(x)b_l{}^{\mu}(x)\ , \\
& A^{kl}{}_{\mu}(x) \to \\
& \qquad A^{kl}{}_{\mu}{}'(x') = A^{kl}{}_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\omega^{kl}(x) \\
& \qquad\qquad + \omega^k{}_m(x)A^{ml}{}_{\mu}(x) \\
& \qquad\qquad + \omega^l{}_m(x)A^{km}{}_{\mu}(x) \\
& \qquad\qquad - \partial_{\mu}\epsilon^{\nu}(x)A^{kl}{}_{\nu}(x)
\end{aligned}
\right. \qquad (11)
$$

で定義される．ここで, 推進変換のパラメータ $\epsilon^{\mu}(x)$ とローレンツ変換のパラメータ $\omega^{kl}(x)$ は座標の無限

[4] 共変微分 D_k の交換関係は $D_kD_l - D_lD_k = \frac{i}{2}F_{mnkl}S^{mn} + \mathcal{C}^m{}_{kl}D_m$ となる．

[5] $A_{\cdots(k\cdots l)\cdots} = \frac{1}{2}(A_{\cdots k\cdots l\cdots} + A_{\cdots l\cdots k\cdots})$，　$A_{\cdots[k\cdots l]\cdots} = \frac{1}{2}(A_{\cdots k\cdots l\cdots} - A_{\cdots l\cdots k\cdots})$．

小任意関数である．場の強さ，およびその規約成分は推進変換に対し不変であり，ローレンツ変換に対し共変である．よって，物質場の作用積分 $\int \mathcal{L}_M d^4x$ およびゲージ場の作用積分 $\int \mathcal{L}_G d^4x$ は，これらの変換のもとで不変である．

ラグランジュアン密度のなかの 4 つの不変量，${}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm}$, ${}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k$, ${}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k$, F は ローレンツゲージ場の 2 次の項を含むので ローレンツゲージ場は質量を持つことが出来る．質量項の存在は素粒子の電弱相互作用および強い相互作用のゲージ理論と異なるポアンカレゲージ理論の特徴である．

この作用積分は次の形に書き換えることが出来る．

$$I_G = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{2\kappa} bR + \partial_\mu \left(\frac{1}{\kappa} b b^{n\mu V} \mathcal{C}_n \right) + \mathcal{L}_{mix} + \mathcal{L}_L \Big\} , \quad (12)$$

ただし，R は $g_{\mu\nu} = b_{k\mu} b^k{}_\nu$ とした時のクリストッフェルの接続から定義されたスカラー曲率である．クリストッフェルの接続 $\left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\}$，曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$, Ricci テンソル $R\mu\nu$，スカラー曲率 R の定義は次の通りである．

$$\begin{aligned}
\left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) , & (13)\\
R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} &= \partial_\lambda \left\{ {\mu \atop \nu\,\rho} \right\} - \partial_\rho \left\{ {\mu \atop \nu\,\lambda} \right\} \\
&\quad + \left\{ {\mu \atop \sigma\,\lambda} \right\} \left\{ {\sigma \atop \nu\,\rho} \right\} - \left\{ {\mu \atop \sigma\,\rho} \right\} \left\{ {\sigma \atop \nu\,\lambda} \right\} , & (14)\\
R_{\mu\nu} &= R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda} , & (15)\\
R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} . & (16)
\end{aligned}$$

また，$\mathcal{L}_{mix}$，$\mathcal{L}_L$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{mix} &= b \Big\{ \left(\alpha + \frac{2}{3} a \right) {}^T\mathcal{C}_{klm}\ {}^T\mathcal{C}^{klm} \\
&\quad + \left(\beta - \frac{2}{3} a \right) {}^V\mathcal{C}_k\ {}^V\mathcal{C}^k \\
&\quad + \left(\gamma + \frac{3}{2} a \right) {}^A\mathcal{C}_k\ {}^A\mathcal{C}^k \Big\} , & (17)\\
\mathcal{L}_L &= b(a_1 A_{klmn} A^{klmn} + a_2 B_{klmn} B^{klmn} \\
&\quad + a_3 C_{klmn} C^{klmn} + a_4 E_{kl} E^{kl} \\
&\quad + a_5 G_{kl} G^{kl} + a_6 F^2) & (18)
\end{aligned}$$

で定義される．$\mathcal{L}_{mix}$ は 4 脚場の微分とローレンツゲージ場が混在しているラグランジュアン密度であり，$\mathcal{L}_L$ は 4 脚場の微分を含まないローレンツゲージ場のラグランジュアン密度である．

条件 $\alpha + 2a/3 = \beta - 2a/3 = \gamma + 3a/2 = 0$ を仮定すると，$\mathcal{L}_{mix}$ が消え，ローレンツゲージ場の質量項がなくなる．さらに，ローレンツゲージ場が零であるとすると作用積分は一般相対論のものと等価になる．

作用積分より，$b_{k\mu}$ に対する場の方程式は

$$\begin{aligned}
\overset{(M)}{T}{}^{k\mu} &= -2b_l{}^\mu b_m{}^\nu D_\nu I^{klm} - 2b_l{}^{\mu\ V}\mathcal{C}_m I^{klm} \\
&\quad + b^{p\mu} \mathcal{C}_{plm} I^{klm} - 2b_p{}^\mu \mathcal{C}_{lm}{}^k I^{plm} \\
&\quad - 2b_p{}^\mu F_{lmn}{}^k H^{lmnp} + b^{k\mu} \mathcal{L}_G / b & (19)
\end{aligned}$$

となり，$A_{kl\mu}$ に対する場の方程式は

$$\begin{aligned}
\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu} &= -4b_m{}^\mu b_n{}^\nu D_\nu H^{klmn} - 2b^{r\mu} \mathcal{C}_{rnm} H^{klmn} \\
&\quad - 4b_m{}^{\mu\ V}\mathcal{C}_n H^{klmn} - 4b_m{}^\mu I^{[kl]m} & (20)
\end{aligned}$$

となる．ただし，H^{klmn}，I^{klm}，$\overset{(M)}{T}{}^{k\mu}$，$\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu}$，$D_\mu I^{klm}$，$D_\mu H^{klmn}$ は

$$\begin{aligned}
H^{klmn} &= 12a_1 A^{klmn} + 8a_2 B^{[kl][mn]} \\
&\quad + 4a_3 C^{klmn} \\
&\quad + 2a_4 (E^{k[m} \eta^{n]l} - E^{l[m} \eta^{n]k}) \\
&\quad + 2a_5 (G^{k[m} \eta^{n]l} - G^{l[m} \eta^{n]k}) \\
&\quad + 2a_6 F \eta^{k[m} \eta^{n]l} \\
&\quad + a \eta^{k[m} \eta^{n]l} , & (21)\\
I^{klm} &= 2\alpha\ {}^T\mathcal{C}^{k[lm]} + 2\beta \eta^{k[l\ V}\mathcal{C}^{m]} \\
&\quad + \frac{1}{3} \gamma \epsilon^{rklm\ A}\mathcal{C}_r , & (22)\\
\overset{(M)}{T}{}^{k\mu} &= b_l{}^\mu \frac{\partial L_M}{\partial D_l q^A} (D_k q)^A - b^{k\mu} L_M , & (23)\\
\overset{(M)}{S}{}^{kl\mu} &= \frac{\partial L_M}{\partial q^A{}_{,\mu}} i (S^{kl} q)^A , & (24)\\
D_\mu I^{klm} &= I^{klm}{}_{,\mu} - A^k{}_{p\mu} I^{plm} \\
&\quad - A^l{}_{p\mu} I^{kpm} - A^m{}_{p\mu} I^{klp} , & (25)\\
D_\mu H^{klmn} &= H^{klmn}{}_{,\mu} - A^k{}_{p\mu} H^{plmn} \\
&\quad - A^l{}_{p\mu} H^{kpmn} - A^m{}_{p\mu} H^{klpn} \\
&\quad - A^n{}_{p\mu} H^{klmp} & (26)
\end{aligned}$$

と定義されている．

また，ゲージ場の正準エネルギー $H = \int \mathcal{H} d^3$ を与えるエネルギー密度 $\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 2bI^{klm} b_l{}^\alpha b_m{}^0 b_{k\alpha,0} \\
&\quad - 2bH^{klmn} b_m{}^\alpha b_n{}^0 A_{kl\alpha,0} - L_G & (27)
\end{aligned}$$

である．

3 ローレンツゲージ場の $0^\pm$ 成分

ローレンツゲージ場が支配的である状況で，ローレンツゲージ場の $0^\pm$ 成分を調べる．ローレンツゲージ場が将来加速器実験等で測定に掛かる可能性があるのはこのような状況であるから，この仮定のもと

で可能なパラメータを絞ることは意味があることである．弱場近似での伝播モードを調べた二つの論文があるが，林・白藤の論文[3]では四脚場とローレンツゲージ場について線形近似を行い，宮本らの論文[4]ではローレンツゲージ場が支配的である状況を考え，四脚場の重力場成分 $c_k{}^\mu = c_k{}^\mu - \delta_k^\mu$ を零として，ローレンツゲージ場のみの線形近似を行い解析をしている．これを自由場近似と呼んでいる．この二つの論文は対応する結果をもたらしている．

四脚場の重力場成分 $c_k{}^\mu = c_k{}^\mu - \delta_k^\mu$ は無視でき，ローレンツゲージ場は $0^\pm$ 成分のみ真空期待値を持つと仮定し，

$$q^A = 0 \tag{28}$$

$$b_k{}^\mu = \delta_k^\mu \tag{29}$$

$$A_{klm} = (\delta_k^0\eta_{lm} - \delta_l^0\eta_{km})\phi + \epsilon_{0klm}\psi \tag{30}$$

とする．ここで ϕ, ψ は，それぞれ，ローレンツゲージ場の $0^+, 0^-$ 成分を表し，座標 x^μ に依らない定数であるとする．

場の動方程式 (20) は

$$\begin{aligned} 0 &= \phi\Big\{-48(a_5+3a_6)\phi^2 \\ &\quad +48(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\psi^2 \\ &\quad +18(\beta-\frac{2}{3}a)\Big\}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \psi\Big\{16(a_5+3a_6)\psi^2 \\ &\quad -16(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\phi^2 \\ &\quad -\frac{8}{3}(\gamma+\frac{3}{2}a)\Big\} \end{aligned} \tag{32}$$

となる．これより，$0^+, 0^-$ 成分 ϕ, ψ は零ではない真空期待値を取りうる可能性がある．

次に，正準エネルギー H を調べる．正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$(33) は，

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -12(a_5+3a_6)\phi^4 - 12(a_5+3a_6)\psi^4 \\ &\quad +24(36a_1+4a_3+a_5+3a_6)\phi^2\psi^2 \\ &\quad +9(\beta-\frac{2}{3}a)\phi^2 + 4(\gamma+\frac{3}{2}a)\psi^2 \end{aligned} \tag{33}$$

となる．当然ながら，場の方程式はエネルギー密度 $\mathcal{H}$ の極値を与える条件となっている．ここで，エネルギー密度 $\mathcal{H}$ が最小値を持つための条件を調べる．式 (33) の ϕ, ψ の 4 次項の解析より

$$a_5+3a_6 \neq 0 \text{ のとき } a_5+3a_6<0, 9a_1+a_3>0 \tag{34}$$

を得る．$a_5 + 3a_6 = 0$ のときは

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 96(9a_1+a_3)\phi^2\psi^2 \\ &\quad +9(\beta-\frac{2}{3}a)\phi^2 + 4(\gamma+\frac{3}{2}a)\psi^2 \end{aligned} \tag{35}$$

となるので

$$a_5+3a_6=0 \text{ のとき } 9a_1+a_3 \geq 0, \beta-\frac{2}{3}a \geq 0, \gamma+\frac{3}{2}a \geq 0 \tag{36}$$

が必要である．さらに，ϕ, ψ が零でない値を取りうるかどうか，取りうるときの値を調べることができるが，次節での議論には影響しないので結果は示さない．

4　可能な理論

前節で正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ が最小値をもつ条件 (34), (36) を導いた．これと，ローレンツゲージ場の伝播モードを調べた結果を組み合わせ結論を導く．宮本ら[4]は，すべての質量項が存在するときに，自由場近似で伝播モードを調べて，$0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$ の伝播モードが存在する可能性が示し，各伝播モードがタキオンではなく正定値のエネルギーを持つ条件を得ている．$0^\pm$ 伝播モードに対する結果は

$$0^+ \text{モードに対し} \quad a_5+3a_6>0, \beta-\frac{2}{3}a>0 \tag{37}$$

$$0^- \text{モードに対し} \quad 9a_1+a_3<0, \gamma+\frac{3}{2}a>0, \tag{38}$$

である．それぞれの 1 つ目の条件の左辺のパラメータ式が零の場合，伝播モードが消失する．Sezgin と Nieuwenhuizen[5] も，すべての質量項が存在するときにローレンツゲージ場の伝播関数の解析し，同じ結果を得ている．すべての質量項が存在しないときは，筆者らがエネルギーを調べた結果[6]，伝播関数を調べた結果[13]があり，共に $0^\pm$ 伝播モードに対し

$$0^+ \text{モードに対し} \quad a_5+3a_6>0, \beta-\frac{2}{3}a=0 \tag{39}$$

$$0^- \text{モードに対し} \quad 9a_1+a_3<0, \gamma+\frac{3}{2}a=0 \tag{40}$$

を得ている．質量項の一部が存在しない場合についても，未発表であるが，筆者の伝播関数についての解析があり，結果はこれらの組み合わせになる．

正準エネルギー密度 $\mathcal{H}$ が最小値をもつ条件と伝播モードの条件は両立しない，そのため，伝播する $0^\pm$ モードは存在しない．すなわち，条件

$$9a_1+a_3=0, a_5+3a_6=0 \tag{41}$$

を満たされることになる．このとき，

$$\mathcal{H} = 9\left(\beta-\frac{2}{3}a\right)\phi^2 + 4\left(\gamma+\frac{3}{2}a\right)\psi^2 \tag{42}$$

となり，$\mathcal{H}$ が最小値をもつ条件は $\beta-\frac{2}{3}a \geq 0$, $\gamma+\frac{3}{2}a \geq 0$ となる．$0^\pm$ それぞれの質量項が存在すると

き，すなわち $\beta-\frac{2}{3}a>0,\ \gamma+\frac{3}{2}a>0$ のとき，ϕ,ψ の真空期待値は零のみが許される．条件 $9a_1+a_3=0, a_5+3a_6=0, \beta-\frac{2}{3}a=0,\ \gamma+\frac{3}{2}a=0$ が満たされているときは，$0^{\pm}$ 成分の自由度が突発的局所変換の自由度になっているのではないかと考える．

以下では，得られた結果についていくつかコメントを加える．

ローレンツゲージ場が支配的な状況を仮定し解析したが，この結果は，仮定しない場合に比べより厳しい条件を与える可能性がある．四脚場の重力成分とローレンツゲージ場の寄与の大きさについて仮定を行わない解析が必要である．二つの場合の解析結果の比較は興味深い．

ポアンカレゲージ理論においても $F(R)$ 理論のような高次の項を導入する拡張が可能である．関数をうまく選べば，エネルギーの下への有界性は保証されるので，ϕ,ψ がゼロでない値を取りうる可能性が生じる．ただし，ここでの議論は初めからやり直す必要がある．

5　おわりに

ローレンツゲージ場が支配的である状況で，$0^{\pm}$ 成分について，エネルギーが最小値をもつ条件と自由場近似での伝播モードでの条件を組み合わせ，$0^{\pm}$ 伝播モードは存在しない，$\beta-\frac{2}{3}a>0,\ \gamma+\frac{3}{2}a>0$ のとき $0^{\pm}$ 成分の真空期待値は零であることを示した．他の成分に関する同様な解析やローレンツゲージ場が支配的であるという仮定を外した一般的な解析が次の課題である．

参考文献

1) K. Hayashi, "Gauge Theories of Masive and Massless Tensor Fields", Prog. Theor. Phys. **39** (1968), 494.

2) F. W. Hehl, in *Proc. of the 6th Course of the School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity, Erice, Italy*, 1979, ed. P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York 1980).

3) K. Hayashi and T. Shirafuji, "Gravity from Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. IV —Mass and Energy of Particle Spectrum—", Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 2222.

4) S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, "Linear Approximation for the Lorentz Gauge Field ", Prog. Theor. Phys. **66** (1981), 481.

5) E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, "New Ghost Free Gravity Lagrangians with Propagating Torsion", Phys. Rev. **D21** (1980), 3269.

6) K. Fukuma, S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, "Massless Lorentz Gauge Field Consistent With Einstein's Gravitation Theory —The Case $\alpha+3a/2=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ —", Prog. Theor. Phys. **73** (1985), 874.

7) S. Nakariki, "A Spinor Approach to Poincare Gauge Theory —In a Case of Massless Lorenz Gauge Field— ", Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 523.

8) E. Sezgin, "Class of Ghost Free Gravity Lagrangians With Massive or Massless Propagating Torsion", Phys. Rev. **D24** (1981), 1677.

9) R. Battiti and M. Toller, "Zero Mass Normal Modes In Linearized Poincare Gauge Theories ", Lett. Nuovo Cim. **44** (1985), 35.

10) R. Kuhfuss and J. Nitsch, "Propagating Modes in Gauge Field Theories of Gravity ", Gen. Rel. Grav. **18** (1986), 1207.

11) M. Fukui, "Massless Torsion Fields. I —The Case $\alpha+2a/3\neq 0$ —", Prog. Theor. Phys. **71** (1984), 633.

12) M. Fukui and J. Masukawa, "Massless Torsion Fields. II —The Case $\alpha+2a/3=0$ —" Prog. Theor. Phys. **73** (1985), 75.

13) K. Fukuma, "Massless modes of Lorentz gauge fields in Poincare gauge theory of gravity — The case with $\alpha+2a/3=\beta-2a/3=\gamma+3a/2=0$ —", Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 191.