

Yang-Mills 理論の CFN 分解とゲージ不変なモノポールの構成

part I

加藤清考 (高松高専)、近藤慶一 (千葉大理)、柴田章博 (高工ネ研)、篠原徹 (千葉大自然)、村上武晴 (千葉大自然)、伊藤祥一 (長野高専)

We propose a gauge-invariant definition of the magnetic monopole current in Yang-Mills theory using Cho-Faddeev-Niemi(CFN) decomposition and compare the new definition with the conventional one by DeGrand and Toussaint to exhibit its validity.

キーワード: Yang-Mills 理論、CFN 分解、モノポール、格子ゲージ理論

1. Cho-Faddeev-Niemi 分解 (CFN 分解)

Cho-Faddeev-Niemi(CFN) 分解とは、任意の 3 成分 (単位) カラー・ベクトル場 $\vec{n}(x)$ ($\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ を満たす) を用いて Yang-Mills ゲージ場 $\vec{A}_\mu(x)$ を (カラー空間中で)、

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu(x) &= \vec{V}_\mu(x) + \vec{X}_\mu \\ \vec{V}_\mu(x) &= c_\mu(x)\vec{n}(x) + g^{-1}\vec{n}(x) \times \partial_\mu \vec{n}(x)\end{aligned}$$

のように $\vec{n}(x)$ に平行な成分と、それに垂直な 2 成分に分解することを言う*。 g は Yang-Mills 理論のゲージ結合定数を表す。ここで、各成分は

- $\vec{V}_\mu(x)$ は diagonal gluon field
- $c_\mu(x) = \vec{A}_\mu(x) \cdot \vec{n}(x)$ は $\vec{V}_\mu(x)$ の regular part で $\vec{n}(x)$ に平行な成分 photon field (restricted potential と呼ぶ)
- $\vec{B}_\mu \equiv g^{-1}\vec{n}(x) \times \partial_\mu \vec{n}(x)$ は $\vec{V}_\mu(x)$ の singular part で $\vec{n}(x)$ に垂直な成分 magnetic field
- \vec{X}_μ は $\vec{n}(x)$ に垂直な成分 ($\vec{n}(x) \cdot \vec{X}_\mu(x) = 0$) で gauge covariant potential と呼ぶ。 off-diagonal gluon field

*簡単のため、この論文ではゲージ群が $SU(2)$ の Yang-Mills 理論に限って議論をするが、 $SU(N)$ 、 $N \geq 3$ の場合も同じようにできる。

のように解釈する。

この時、non-Abelian field strength $\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ は、次のように分解される；

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \\ &= \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{H}_{\mu\nu} + \hat{D}_\mu \vec{X}_\nu - \hat{D}_\nu \vec{X}_\mu + g\vec{X}_\mu \times \vec{X}_\nu\end{aligned}$$

ここで、 $\hat{D}_\nu[\vec{V}] \equiv \hat{D}_\nu = \partial_\nu + g\vec{V}_\nu \times$ 、

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mu\nu} &= f_{\mu\nu}\vec{n}, \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu \\ \vec{H}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + g\vec{B}_\mu \times \vec{B}_\nu = -g\vec{B}_\mu \times \vec{B}_\nu \\ &= -g^{-1}(\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})\end{aligned}$$

$\vec{H}_{\mu\nu}$ は magnetic field strength で、 \vec{n} に比例するから、次のように書き直せる；

$$\vec{H}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}\vec{n}, \quad H_{\mu\nu} = -g^{-1}\vec{n} \cdot (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})$$

(Global $SU(2)$) ゲージ不変な monopole current は

$$\begin{aligned}k_\mu(x) &\equiv \partial_\nu {}^*G^{\mu\nu}(x) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu G_{\rho\sigma}(x)\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu c_\nu(x) - \partial_\nu c_\mu(x) \\ &\quad - \frac{1}{g}\epsilon_{abc}n^a(x)\partial_\mu n^b(x)\partial_\nu n^c(x) \\ &= f_{\mu\nu}(x) + H_{\mu\nu}(x).\end{aligned}\tag{2}$$

で定義される。いま、monopole current への電場 (f)、磁場 (H) からのそれぞれの寄与を分けて

$$k_\mu = k_\mu^f + k_\mu^H, \quad k_\mu^f = \partial_\nu {}^* f^{\mu\nu}, \quad k_\mu^H = \partial_\nu {}^* H^{\mu\nu} \quad (3)$$

を定義しておく。

2. lattice CFN monopole

この章では、前章で定義した連続時空での monopole current (1) を格子上にのせる。

2.1. 格子上の CFN monopole の定義

まず連続理論での CFN 分解における monopole current の磁場からの寄与;

$$k_\mu^H(x) = \partial_\nu {}^* H^{\mu\nu}(x) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu H_{\rho\sigma}(x) \quad (5)$$

を次のようにして lattice 上にのせる

通常、4次元 Euclid 空間を正方格子によって離散化したものを original lattice と呼び、original lattice の各 site を $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$ だけ平行移動してできる格子を dual lattice とよぶ [3]。図 1 は 2次元正方格子の場合を絵にしたものである。つまり dual lattice 上の site *n は original lattice の site と次のような関係で結ばれている： ${}^*n = n + (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$ 。ここで、 a は lattice spacing を表す。

k-form ($k=0,1,2,3,4$) の切断に対応する場合は、格子上でそれぞれ site、link、plaquette、cube、hypercube 上に値をとる変数になる。また、dual k-form の切断に対応する場合も dual lattice 上で同じように定義できる。従って、(5) 式で定義される CFN monopole current は dual 1-form (の切断に対応する場) であるから、dual lattice 上の link 場となる。

特に、dual lattice を図 1 のように定義した場合は、dual link $({}^*n, \hat{\mu})$ の中点 ${}^*n + \frac{1}{2}\hat{\mu}$ は original lattice の座標 $n + \frac{1}{2}\hat{\mu} + (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$ に対応しており、これは、cube $(n + \hat{\mu}, \nu, \rho, \sigma)$ の中点に一致

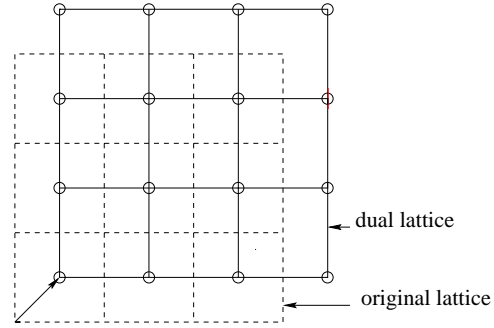


Figure 1. original lattice と dual lattice

する。つまり、dual link $({}^*n, \hat{\mu})$ の中点は、original cube $(n + \hat{\mu}, \nu, \rho, \sigma)$ の中点に一致する。ここで、site n から μ 方向に lattice spacing a を単位に 1 site だけ移動した site を $n + \hat{\mu}$ によって表す。

以上から、(5) 式の lattice version は、

$$\frac{1}{g} K_\mu({}^*n) \equiv -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu H_{\rho\sigma}(n + \hat{\mu}) \quad (6)$$

で定義する。ただし、右辺の微分は前方差分：

$$\partial_\nu H_{\rho\sigma}(n) \equiv H_{\rho\sigma}(n + \hat{\nu}) - H_{\rho\sigma}(n)$$

である。また、ゲージ結合定数 g は lattice monopole current の定義から抜き出した。

例えば、 $K_1({}^*n)$ を具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} K_1({}^*n) \\ &= \partial_2 H_{34}(n + \hat{1}) - \partial_3 H_{24}(n + \hat{1}) + \partial_4 H_{23}(n + \hat{1}) \\ &= H_{34}(n + \hat{1} + \hat{2}) - H_{34}(n + \hat{1}) \\ & \quad - H_{24}(n + \hat{1} + \hat{3}) + H_{24}(n + \hat{1}) \\ & \quad + H_{23}(n + \hat{1} + \hat{4}) - H_{23}(n + \hat{1}) \end{aligned}$$

となる。

2.2. シミュレーション結果

ここでは、モノポール密度の β 依存性を調べる。Figure 2 は、DeGrand monopole の密度の β 依存性である。 β が大きくなると共に、密度が小さくなっていくことが分かっている。

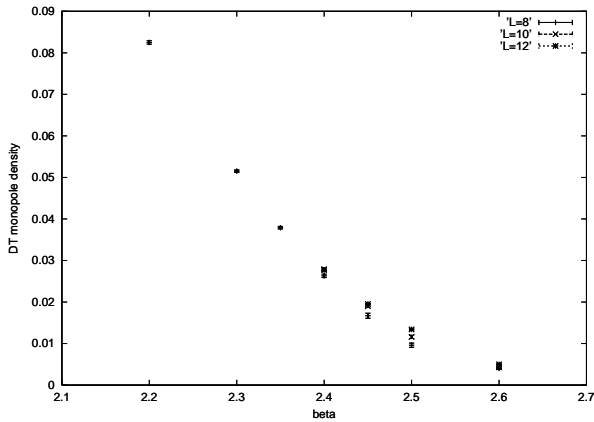


Figure 2. DeGrand-Toussaint monopole density の β 依存性 [3].

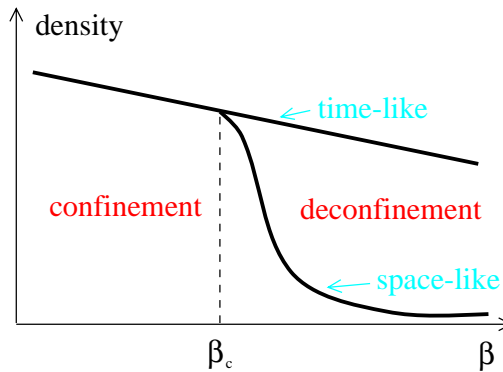


Figure 3. 有限温度における monopole density の β 依存性

有限温度では、モノポール密度の振る舞いは、space-like monopole と time-like monopole で異なる (Figure 3 参照)。特に非閉じ込め相では、space-like monopole はほとんどなくなることが知られている。

CFN monopole でこれを調べる。Figure 4 に CFN monopole の密度の β 依存性を DeGrand monopole のそれと比較したものを示す。この結果、DeGrand monopole と CFN monopole は β に

対し、ほぼ同じ振る舞いをしめすことが分った。

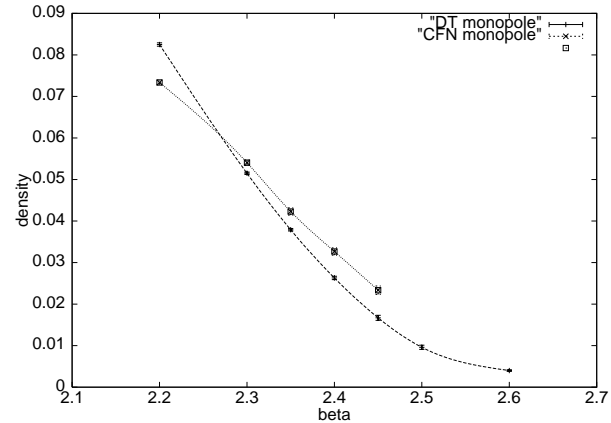


Figure 4. DeGrand monopole と CFN monopole の比較。CFN monopole の density は $\rho'_{mon} = \rho_{mon}/2\pi$ を取った。

これまで、DeGrand monopole は SU(2) QCD の閉じ込め現象を格子上で調べるため使用され、string tension の monopole dominance や、QCD の低エネルギー有効作用としてのモノポール作用の構築、有限温度 (閉じ込め-非閉じ込め) 相転移などの重要な事項を示してきたが、これが、't Hooft 流の QCD monopole になっているという確証は今のところ得られていない。(対角化されるオペレータの固有値が縮退する点と (DeGrand) モノポールの存在する点の相関がないという意味で。) 今回の CFN monopole と DeGrand monopole の密度の β 依存性がほぼ一致しているという事実は、その一面をあぶり出しているのではないかと期待している。また、もしそうであれば、今回定義した格子上の CFN monopole は DeGrand monopole がそうであったように、string tension の monopole dominance や、QCD の低エネルギー有効作用としてのモノポール作用の構築、有限温度 (閉じ込め-非閉じ込め) 相転移などを再現できるはずである。

monopole loop condensate Φ ;

monopole loop condensate Φ は

$$\Phi(x) \equiv \frac{\langle \sum_{x,\mu} k_\mu(x) k_\mu(x) \rangle}{V}$$

で定義される。先ほどの、モノポール密度は Lorentz 不変ではなかった。この量は、Lorentz 不変であり、dual gauge 場の質量の二乗に結びつく量である。monopole loop condensate を、physical scale $a(\beta)$ を横軸にとってプロットすると、Figure 5 のようになる。

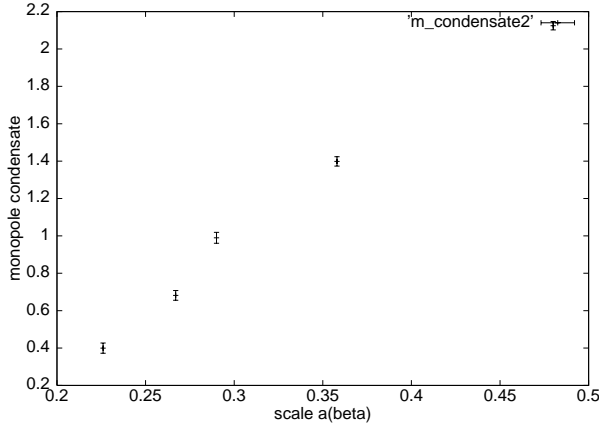


Figure 5. monopole condensate のスケール依存性

monopole loop condensate Φ は質量次元 2 の量であるから、naive には $a(\beta)^2$ でスケールするはずである。 Φ を $a(\beta)^2$ で割った値 $\Phi_{phys} \equiv \Phi/a^2$ を表 1 に示す。連続極限をとってもこれが生き残るためには、 Φ_{phys} が一定値をとること期待されるが、この結果からは確定的なことは言えない。もう少し大きい lattice size で調べる必要がある。

ちなみに、dual gauge boson の質量を大雑把に見積ると、

$$m_b \simeq \sqrt{\frac{10}{4}} \times 440 MeV = 695 MeV$$

のオーダーになる。

Effective constraint potential;

表 1

physical monopole condensate Φ_{phys}

$a(\beta)$	Φ_{phys}
0.226	7.821
0.267	9.652
0.290	11.768
0.358	10.912
0.480	9.221

Effective constraint potential は次式で定義される ;

$$\begin{aligned} V[\Phi] &\equiv -\ln \langle \delta(\Phi - \mathcal{O}) \rangle \\ &= -\ln \left[\frac{1}{N_{conf}} \sum \delta(\Phi - \mathcal{O}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathcal{O}(k) = \frac{\langle \sum_{x,\mu} k_\mu(x) k_\mu(x) \rangle}{V} \quad (8)$$

これを Figure 6 に示す。この結果から、 $\Phi \neq 0$ の点で真空が極値をとることが読み取れる。つまり、QCD 真空中でモノポール凝縮が実現していることが示唆される。

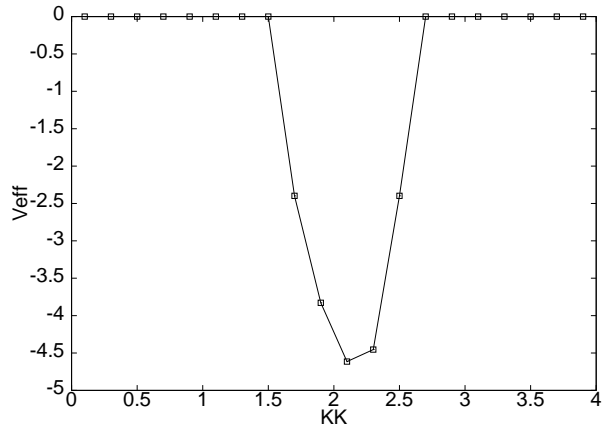


Figure 6. 8^4 -lattice, $\beta = 2.3$, thermalization=3000sweeps、iteration=100sweeps、50 配位での値。メッシュ間隔は 0.2 にとった。

2.3. C_μ 場からのモノポールへの寄与

この節では、(5) 式にゲージ場 (restricted potential) $c_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)n^a(x)$ からの寄与を加えて monopole current を計算する。連続理論での CFN 分解における monopole current は、

$$\begin{aligned} k_\mu(x) &= \partial_\nu^* G^{\mu\nu}(x) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu G_{\rho\sigma}(x). \end{aligned}$$

であった。

Georgi-Glashow 模型における 't Hooft-Polyakov monopole 解はヒッグス場 $\hat{\phi}$ (n 場に対応) が hedgehog 的な配位となり、 $H_{\mu\nu}$ の部分から monopole current が現れ、 $f_{\mu\nu}$ 部分はゲージ場が正則であるため、寄与しない。逆に unitary gauge をとって、 $\hat{\phi}$ をカラー空間の 3 方向にそろえると、今度は、 $H_{\mu\nu}$ 部分が効かず、 $f_{\mu\nu}$ 部分から monopole current が現れる (5 節参照)。

2.1 節では、今行っている格子上の CFN 分解において、monopole current への $f_{\mu\nu}$ からの寄与は無視できると仮定して、monopole current の $H_{\mu\nu}$ 部分のみを計算していたが、ここでは $f_{\mu\nu}$ の寄与を含めて、monopole density を計算し、2.2 節のシミュレーション結果と比較する。 $f_{\mu\nu}$ の寄与を入れても、density は変わらないことが期待される。

格子上の restricted potential: $c_\mu(x)$

link 場を $U_{x,\mu} = e^{-i\mathbf{A}_\mu(x)}$ ($\mathbf{A}_\mu(x) \equiv agA_\mu(x)$) でパラメトライズすると、Yang-Mills 場 $\mathbf{A}_\mu(x)$ は (lattice spacing a の高次補正は無視して)

$$\mathbf{A}_\mu(x) = -\frac{1}{2i}(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^\dagger) \quad (9)$$

の関係により与えられる。

一方、 $U_{x,\mu}$ を

$$U_{x,\mu} = U_{x,\mu}^0 1 + iU_{x,\mu}^i \sigma^i$$

のように展開する ($i = 1, 2, 3$)。これと、 $\mathbf{A}_\mu(x) = \mathbf{A}_\mu^i(x) \frac{\sigma^i}{2}$ を (9) 式に代入して、Pauli 行列 σ^i の係

数を比較すると、

$$\mathbf{A}_\mu^i(x) = -2U_{x,\mu}^i \quad (10)$$

を得る。

CFN 分解で現れる restricted potential $c_\mu(x)$ は

$$c_\mu(x) = n^i(x) \mathbf{A}_\mu^i(x) = \text{Tr}[\mathbf{n}(x) \mathbf{A}_\mu(x)] \quad (11)$$

である。したがって、シミュレーションで生成した n 場と link 場 U の配位、 $\{n_x^1, n_x^2, n_x^3\}$ 、 $\{U_{x,\mu}^0, U_{x,\mu}^1, U_{x,\mu}^2, U_{x,\mu}^3\}$ から、

$$c_\mu(x) = -2\{n_x^1 U_{x,\mu}^1 + n_x^2 U_{x,\mu}^2 + n_x^3 U_{x,\mu}^3\} \quad (12)$$

によって、restricted potential の配位 $\{c_\mu(x)\}$ を得る。

格子上の (electric)field strength: $f_{\mu\nu}(x)$

(electric)field strength: $f_{\mu\nu}(x)$ は restricted potential $c_\mu(x)$ から

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu c_\nu(x) - \partial_\nu c_\mu(x) \quad (13)$$

により定義される。これを格子に乘せるために、naive に微分を差分化した表式；

$$f_{\mu\nu}(x) = c_\nu(x + \hat{\mu}) - c_\nu(x) - c_\mu(x + \hat{\nu}) + c_\mu(x) \quad (14)$$

を使う。

シミュレーション結果

2.2 節で得られた結果と比較するため、 8^4 -lattice、 $\beta = 2.35$ において、thermalization=3000、iteration=100、測定回数 50 回の条件でシミュレーションを行った。

Figure 4 において、 $\beta = 2.35$ における $H_{\mu\nu}(x)$ のみから計算した monopole density ρ_H ；

$$\rho_H = \frac{1}{4L} \langle N_H \rangle, \quad N_H = \sum_{x,\mu} |k_{x,\mu}^H| \quad (15)$$

は、

$$\rho_H = 0.26935 \pm 0.00569 \quad (16)$$

であった。ここで、 L は格子サイズ ($L = 8$)、 $k_{x,\mu}^H$ は (6) 式で定義された monopole current である。

一方、(9) 式から計算した monopole density ρ_{f+H} は、

$$\rho_{f+H} = 0.26935 \pm 0.00569 \quad (17)$$

となり、 ρ_H と完全に一致した。ゆえに、(9) 式の full gauge invariant な monopole current でも、density は DeGrand monopole のそれと一致する。

ちなみに、測定回数 1 回目の原点にいる monopole current の配位は

$$\begin{aligned} & (k_1(1), k_2(1), k_3(1), k_4(1)) \\ & = (-1.15, 0.75, 2.89, -1.11) \end{aligned} \quad (18)$$

であった。この配位への (electric) field strength $f_{\mu\nu}(x)$ からの寄与は

$$\begin{aligned} & (k_1^f(1), k_2^f(1), k_3^f(1), k_4^f(1)) \\ & = (-3.33, -0.55, -1.11, 1.11) \times 10^{-16} \end{aligned} \quad (19)$$

で、一方、 $H_{\mu\nu}(x)$ からの寄与は

$$\begin{aligned} & (k_1^H(1), k_2^H(1), k_3^H(1), k_4^H(1)) \\ & = (-1.15, 0.75, 2.89, -1.11) \end{aligned} \quad (20)$$

であった。したがって、ここで得られた n 場の配位では、 $f_{\mu\nu}$ は singularity をもっておらず、monopole current には寄与していないことが確認された。念のため、このときの restricted potential $c_\mu(x)$ の値も調べてみると、

$$\begin{aligned} & (c_1(1), c_2(1), c_3(1), c_4(1)) \\ & = (-0.48, -0.24, 0.30, 0.03) \end{aligned} \quad (21)$$

であり、決して $c_\mu(x)$ の値自身が小さいわけではない[†]。

[†] 柴田さんの計算によると、Yang-Mills 場のエネルギーへの寄与は、 $H_{\mu\nu}(x)$ よりもむしろ $f_{\mu\nu}$ からの方が大きいことが分かったが、この結果とも矛盾しない。

3. conclusion and discussion

従来、QCD におけるクォーク閉じ込め問題に対する双対ミスナー効果の検証を行うため、格子ゲージ理論によるモンテカルロ・シミュレーションが用いられてきた。この解析で用いられたモノポールはコンパクト QED において DeGrand らが定義したもので、SU(2) ゲージ群をアーベリアン射影によって部分ゲージ固定し、残った U(1) の自由度に対してモノポールの配位を抜き出すというものであった。しかし、このときのモノポール凝縮に基づく双対ミスナー効果が見られるのは、MA ゲージと呼ばれる特別のゲージ固定をしたときのみで、他のゲージではうまくいかないことが知られている。さらに、DeGrand 流のモノポールは、't Hooft が提唱したアーベリアン射影によって現れる本来のモノポールと直ちには結びつかない。これは 't Hooft 流のモノポールは部分的ゲージ固定の特異点として現れるのに対し、DeGrand 流のモノポールが存在する時空点での、部分的ゲージ固定される行列の固有値を調べてみると、必ずしも縮退していない。さらに、従来の方法では、カラーの自由度を破っているため、クォークの閉じ込めは示せたとしても、カラー自由度の閉じ込めについては説明できない。このために、カラー対称性を破らずにモノポールの定義をする必要があるが、今回の論文ではそれを他に先駆けて初めて行った。

このように CFN 分解を用いて定義したモノポール密度の β 依存性等が大きさも含めて、MA ゲージにおける DeGrand monopole と同じ振る舞いをする事が確かめられた。ただし、この格子上のモノポールの構成法は、(i) 格子上でのゲージ不変性が (lattice spacing の 1 次のオーダーでしか) 明白でない (ii) lattice artifact は差分計算しているために、 $O(a)$ で入ってくる。(iii) モノポールカレントが実数変数であるために、磁荷の量子化が明白でないなどの問題点が残っている。

幸いこれらの問題をすべて同時に解決することができる (可能性がある) [8]。

4. 付録 1 . DeGrand-Toussaint(DT) monopole

連続理論におけるゲージ場に対応するリンク場 $U_\mu(s)$ から、アーベリアン射影後次のように U(1) ゲージ場を分離することができる：

$$\begin{aligned}\tilde{U}_\mu(s) &= \exp\{i\tilde{\alpha}_\mu^a T^a\} \\ &= \exp\{i\beta_\mu^1 T^1 + i\beta_\mu^2 T^2\} \exp\{i\beta_\mu^3 T^3\} \quad (22)\end{aligned}$$

ここで次のように

$$\begin{aligned}i\frac{\sin\beta_\mu}{\beta_\mu}(\beta_\mu^1 + i\beta_\mu^2) &\equiv c_\mu^1 + ic_\mu^2 \equiv c_\mu(s) \\ \beta_\mu^3 &\equiv \theta_\mu(s)\end{aligned} \quad (23)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\tilde{U}_\mu(s) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} & -c_\mu^*(s) \\ c_\mu(s) & \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \\ &= C_\mu(s) u_\mu(s)\end{aligned} \quad (24)$$

$u_\mu(s)$ は U(1) ゲージ場であり $C_\mu(s)$ が物質場に対応する。

今、

$$\tilde{U}_\mu(s) = U_0(s, \mu) + iU_i(s, \mu)\sigma_i \quad (25)$$

とパラメトライズすると、

$$u_\mu(s) = \frac{U_0(s, \mu) + iU_3(s, \mu)}{\sqrt{U_0(s, \mu)^2 + U_3(s, \mu)^2}} \quad (26)$$

と書けるから、 $u_\mu(s) = \exp(i\theta_\mu(s))$ 、 $\theta_\mu(s) \in [-\pi, \pi]$ より、

$$\cos\theta_\mu(s) = \frac{U_0}{\sqrt{U_0(s, \mu)^2 + U_3(s, \mu)^2}} \quad (27)$$

$$\sin\theta_\mu(s) = \frac{U_3}{\sqrt{U_0(s, \mu)^2 + U_3(s, \mu)^2}}. \quad (28)$$

よって、

$$\theta_\mu(s) = \arctan\left(\frac{U_3(s, \mu)}{U_0(s, \mu)}\right) \quad (29)$$

となる。

ここでブラケット変数 $\theta_{\mu\nu}(s)$ を $\theta_\mu(s) (= A_\mu^3(s))$ を使って

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu}(s) &= \theta_\mu(s) + \theta_\nu(s + \mu) - \theta_\mu(s + \nu) - \theta_\nu(s) \\ &= \partial_\mu\theta_\nu(s) - \partial_\nu\theta_\mu(s)\end{aligned} \quad (30)$$

で定義する[†]。

この $\theta_{\mu\nu}(s)$ を次のように field strength に対応する $\bar{\theta}_{\mu\nu}(s)$ ($\{\bar{\theta}_{\mu\nu} : -\pi \leq \theta \leq +\pi\}$) と Dirac ストリングに対応する $n_{\mu\nu}(s)$ ($\{n_{\mu\nu} : n = (-2, -1, 0, 1, 2) \in Z\}$) に分解する：

$$\theta_{\mu\nu}(s) = \bar{\theta}_{\mu\nu}(s) + 2\pi n_{\mu\nu}(s) \quad (31)$$

格子上のモノポールカレントは DeGrand と Toussaint に従って、双対格子上のリンク変数として次式で定義される [2]：

$$\begin{aligned}k_\mu(s) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu n_{\rho\sigma}(s + \mu) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\bar{\theta}_{\rho\sigma}(s + \mu)\end{aligned} \quad (32)$$

こうして定義されたモノポールカレントはトポロジカルな保存則 ($\partial'_\mu k_\mu(s) = 0$)^{††} によって双対格子上で閉じたループを作っている。[‡]

5. 付録 2 . 't Hooft-Polyakov monopole

この章では、't Hooft-Polyakov monopole に関する基本的事項の復習をする。

Nielsen-Olsen が場の理論における最初のソリトン解を発見したことに触発されて 't Hooft[4] と Polyakov[5] は独立に、ゲージ理論における正則な解として、3次元空間中に局在したソリトン解：モノポールを見つけた。

[†] 格子上の微分は差分で置き換えられ、 $\partial_\mu f(s) = f(s + \mu) - f(s)$

^{††} ∂'_μ は格子上の後退微分で $\partial'_\mu f(s) = f(s) - f(s - \mu)$

[‡] さらに、ここで定義された elementary monopole は $[-2, 2]$ の整数値を取る。第 2 等式では、通常の設定から更に 2π を割っていることに注意。

随伴表現に属するヒッグス場 (スカラー 3 重項) と結合した $SO(3)$ ゲージ理論 (Georgi-Glashow model[6]) を考えよう。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)^2 - V(\phi) \quad (33)$$

$$V(\phi) \equiv \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a + \lambda(\phi^a\phi^a)^2 \quad (34)$$

ここで、 $a = 1, 2, 3$ で $\lambda > 0$ とする。また、 $G_{\mu\nu}^a$ と D_μ はそれぞれ、場の強さと、共変微分で、

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (35)$$

$$D_\mu\phi^a \equiv \partial_\mu\phi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c \quad (36)$$

である[§]。

$SU(2)$ 変換のもとでの場の変換性は

$$\phi^a(\vec{x}, t) \rightarrow [S(\vec{x}, t)]^{ab}\phi^b \quad (37)$$

$$(A_\mu^a T^a)_{bc} \rightarrow S_{bd}[A_\mu^a T^a + \frac{i}{e}\partial_\mu](S^{-1})_{ec} \quad (38)$$

である。ここで、

$$[S(\vec{x}, t)]^{bc} = [\exp\{-i\theta^a(\vec{x}, t)T^a\}]_{bc} \quad (39)$$

は、 $SU(2)$ の随伴表現 (3×3 行列) であり、 $(T^a)_{bc} = i\epsilon_{abc}$ は $SU(2)$ 3 × 3 行列表現の generator たちである。

$m^2 < 0$ のとき系は自発的に対称性が ($SO(3)$ から $U(1)$ に) 破れ、場 ϕ^a は非ゼロの真空期待値；

$$\langle \phi^a \rangle^2 \equiv v^2 = -\frac{m^2}{4\lambda} \quad (40)$$

を持つ。vacuum manifold は $\mathcal{M} \simeq S^2$ ゲージ場のうち 2 つの成分が質量を獲得し；

$$M_{A^1, A^2} = \sqrt{\frac{-e^2 m^2}{4\lambda}}, \quad (41)$$

3 つ目の成分はゼロ質量にとどまり、生き残った $U(1)$ の電磁相互作用を記述する。一方、ヒッグス粒子は、質量；

$$M_H = \sqrt{-2m^2}, \quad (42)$$

を持つ。

[§]教科書によっては、電荷の定義が逆のものもある； $e \rightarrow -e$

't Hooft は対称性の破れた相において静的・球対称の解を探した。モノポールはヒッグス場が動径方向を向き；

$$\phi^a = vh(r)\frac{x^a}{r}, \quad (43)$$

ゲージ場は

$$A_i^a = -[1 - K(r)]\epsilon^{iaj}\frac{x^j}{er^2}, \quad A_0^a = 0 \quad (44)$$

で与えられる、トポロジカルに非自明な場の配位に相当する (ただし、 $(x^a)^2 = r^2$)。

エネルギーが有限になるために、空間無限大で ϕ^a は真空期待値に近づき、 ϕ^a の共変微分はゼロにならなければならない；

$$D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (45)$$

つまり、未知関数 $h(r)$ 、 $K(r)$ の漸近的振る舞いは、

$$h(r) \rightarrow 1, \quad K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (46)$$

とならなければならない。

(46) 式を (45) に代入すると、確かに

$$\begin{aligned} D_\mu\phi^a &= \partial_\mu\phi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c \\ &= v\left(\frac{\delta_\mu^a}{r} - \delta_{\mu b}\frac{x^a x^b}{r^3}\right) - v\epsilon^{abc}\epsilon^{bjc}\frac{x^j x^c}{r^3} \\ &= v\left(\frac{\delta_\mu^a}{r} - \delta_{\mu b}\frac{x^a x^b}{r^3}\right) - v(\delta^{a\mu}\delta^{cj} - \delta^{aj}\delta^{c\mu})\frac{x^j x^c}{r^3} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

となる。

$\partial_\mu\phi^a \simeq O(r^{-1})$ だから、ゲージ場がないと、ヒッグス場の (運動) エネルギーは $E \simeq \int d^3x(\partial_\mu\phi^a)^2 \simeq O(r)$ となり、線形的に発散することに注意せよ。

一方、原点での正則性より、

$$h(r) \rightarrow 0, \quad K(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0 \quad (48)$$

を要請する。

$r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ を結ぶ解 $h(r)$ 、 $K(r)$ は作用が停留値を取るように (今の場合は、静的だからエネルギーを最小にするように) 決められる。

この解がモノポール解になっていることを見ていく。

$r \rightarrow \infty$ では、場のテンソルは

$$G_{ij}^a \simeq \frac{x^a}{r} \epsilon_{ijk} \frac{x^k}{er^3}, \quad G_{0i}^a \simeq 0 \quad (49)$$

のように振舞う。ここで、 $G_{\mu\nu}^a$ は ϕ^a に比例していることに注意する。これは、(53) が破れていない対称性の生成子に対応していることを示している。

このことをより正確に見るために、't Hooft は電磁場テンソルを $SO(3)$ ゲージ変換に対して不変になるように、次式で定義した；

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{\phi^a}{|\phi|} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e|\phi|^3} \epsilon^{abc} \phi^a (D_\mu \phi^b)(D_\nu \phi^c). \quad (50)$$

規格化されたヒッグス場 $\hat{\phi}^a \equiv \phi^a/|\phi|$ を使って、

$$a_\mu \equiv \hat{\phi}^a A_\mu^a \quad (51)$$

を定義すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \hat{\phi}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a (D_\mu \hat{\phi}^b)(D_\nu \hat{\phi}^c) \quad (52) \\ &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a (\partial_\mu \hat{\phi}^b)(\partial_\nu \hat{\phi}^c) \quad (53) \end{aligned}$$

とも書ける。

これがゲージ不変になっていることは、例えば (52) 式を使って次のように確かめられる；

まず、(52) 式の右辺第 1 項はスカラー量だから $SO(3)$ 回転のもとで不変である。一方、第 2 項は $D_\mu \hat{\phi}^a = S^{ab} D_\mu \phi^b$ に注意すると、

$$\begin{aligned} &\epsilon^{abc} \hat{\phi}^a (D_\mu \hat{\phi}^b)(D_\nu \hat{\phi}^c) \\ &= \epsilon^{abc} S^{ad} S^{be} S^{cf} \hat{\phi}^d (D_\mu \hat{\phi}^e)(D_\nu \hat{\phi}^f) \\ &= (\det S) \epsilon^{def} \hat{\phi}^d (D_\mu \hat{\phi}^e)(D_\nu \hat{\phi}^f) \\ &= \epsilon^{def} \hat{\phi}^d (D_\mu \hat{\phi}^e)(D_\nu \hat{\phi}^f) \quad (54) \end{aligned}$$

となるから、ゲージ不変である[¶]。

具体的に、(43)、(44) の $r \rightarrow \infty$ での漸近形；

$$\phi^a = v \frac{x^a}{r}, \quad A_i^a = -\epsilon^{iaj} \frac{x^j}{er^2}, \quad A_0^a = 0 \quad (55)$$

[¶]より簡単には、 $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \vec{\phi} \cdot \vec{G}_{\mu\nu}$ と書けることから、直ちにゲージ不変性が分かる。

に注意すると、 $\partial_i \phi^c/v = \delta_{ic} \frac{1}{r} - \delta_{id} \frac{2x^d}{r^3}$ だから、

$$\begin{aligned} A_i^a &= \epsilon^{aij} \frac{x^j}{er^2} \\ &= \frac{1}{ev} \epsilon^{acb} \phi^b \frac{\delta^{ci}}{r} \\ &= \frac{1}{ev^2} \epsilon^{acb} \phi^b \partial_i \phi^c + \frac{1}{ev^3 r} \epsilon^{acb} \phi^b \phi^c \phi^i \\ &= \frac{1}{ev^2} \epsilon^{acb} \phi^b \partial_i \phi^c \quad (56) \end{aligned}$$

となる。これを場の強さ (35) に代入すると、例えば、長距離における磁場テンソルは、

$$\begin{aligned} G_{ij}^3 &= \partial_i A_j^3 - \partial_j A_i^3 + \epsilon(A_i^1 A_j^2 - A_j^1 A_i^2) \\ &= \partial_i A_j^3 - \partial_j A_i^3 - \frac{1}{ev^3} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) \quad (57) \end{aligned}$$

となり、(53) が得られる。従って、磁場テンソルは次の構造をもつ：

$$\mathcal{F}_{ij} = \partial_i A_j^3 - \partial_j A_i^3 + (\text{extra term}). \quad (58)$$

't Hooft-Polyakov monopole は長距離で、Dirac monopole と同じ振る舞いをする。Dirac monopole においては、extra term は singular な Dirac スtring で表されるが、't Hooft-Polyakov monopole の場合は、smooth なスカラー場で書かれる。ある意味、't Hooft-Polyakov monopole は singular な Dirac スtring をスカラー場によって smooth にしたといえる。

さて、ヒッグス場を z 軸に向けるゲージ (unitary gauge)；

$$\hat{\phi}^a = \delta^{a3} \quad (59)$$

のときは、(53) より明らかに、

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \quad (60)$$

となる。さらに、 $\phi \neq 0$ のすべての点で、 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ が通常の Maxwell 方程式を満たすことも確かめられる。このゲージ条件は、まだ z 軸の周りの回転だけの自由度が固定されておらず、 $U(1)$ 対称性が残っている。そのゲージ場 (電磁場) はゼロ質量のままとどまっている $a_\mu = \hat{\phi}^a A_\mu^a = \delta^{a3} A_\mu^a = A_\mu^3$ である。この意味で、このゲージは abelian gauge あるいは、physical gauge とも呼ばれる。

このように定義したゲージ不変な電磁場 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ にモノポール解 (43)、(44) の $r \rightarrow \infty$ での漸近形 ($h(r) = 1$, $K(r) = 0$) を代入すると、磁場 B^i は $r \rightarrow \infty$ で、

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mathcal{F}_{jk} = -\frac{1}{er^2} \frac{x^i}{r} \quad (61)$$

となる。従って、総磁束 $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ は $4\pi/e$ となり、確かにモノポールを記述していることが確かめられた。

本来、磁荷は magnetic current k_μ を通して、 $g_m = \int d^3x k^0$ と書かれる。ここで、magnetic current k^μ を次で定義する；

$$k^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho\sigma} \partial_\nu \mathcal{F}_{\rho\sigma}. \quad (62)$$

以下で、一般に与えられたゲージ場 A_μ^a 、ヒッグス場 ϕ^a に対し、磁荷がどのような値をとるか調べる。

まず、ゲージ場 A_μ^a に singularity がない場合を考える。このとき、(62) に対する (53) の前半からの寄与はなく、

$$k^\mu = \frac{1}{2e} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} (\partial_\nu \hat{\phi}^a) (\partial_\rho \hat{\phi}^b) (\partial_\sigma \hat{\phi}^c) \quad (63)$$

となる。このとき、磁荷は

$$\begin{aligned} g &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2e} \oint_{S_r^2} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a (\partial_j \hat{\phi}^b) (\partial_k \hat{\phi}^c) (d^2S)_i \\ &= \frac{4\pi n}{e} \end{aligned} \quad (64)$$

となる。ここで n は整数。

一方、unitary gauge の場合は、 $\hat{\phi}^a = \delta^{a3}$ であったから、(53) の最後の項はゼロになり、場のテンソルは (60) になるから、magnetic current は

$$k^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\partial_\rho a_\sigma - \partial_\sigma a_\rho) \quad (65)$$

となる。これはゼロになるように見えるが、以下に見るようにそうではない。't Hooft テンソル $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ はゲージ不変であったから、magnetic current k_μ 、磁荷 g_m もゲージ不変である。従って、(64) で $n \neq 0$ の場を unitary gauge へゲージ変換した配位に対する magnetic current k_μ 、磁荷 g_m も非

ゼロであることを意味する。ところが、(65) は a_μ に singularity がない限り $k_\mu = 0$ を表している。ゆえに、ここで考えるゲージ変換は singular であり、そのおかげで unitary gauge におけるゲージ場 a_μ が singularity を持つのである。具体的に、't Hooft-Polyakov のモノポール解 (の漸近形) (55) を unitary gauge へゲージ変換してみる。

一般の $SO(3) (\simeq Ad(SU(2)))$ ゲージ変換は Euler 角 (α, β, γ) を用いて

$$\begin{aligned} S &= e^{i\frac{\gamma}{2}\alpha} e^{i\frac{\gamma}{2}\beta} e^{i\frac{\gamma}{2}\gamma} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta/2 e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin \beta/2 e^{i(-\gamma+\alpha)/2} \\ -\sin \beta/2 e^{i(\gamma-\alpha)/2} & \cos \beta/2 e^{i(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける [7]。ここで、 $\alpha = \gamma = \varphi$, $\beta = \theta$ ととると、

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{i\varphi} & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad (66)$$

となり、この変換のもとで、't Hooft-Polyakov のモノポール解 (hedgehog gauge) は unitary gauge に移る；

$$\hat{\phi}^{ia} \frac{\tau^a}{2} = S \hat{\phi}^a \frac{\tau^a}{2} S^{-1} = \delta^{a3} \frac{\tau^a}{2} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} A_i^a \frac{\tau^a}{2} &= S A_i^a \frac{\tau^a}{2} S^{-1} - \frac{i}{e} (\partial_i S) S^{-1} \\ &= \left(\delta^{a3} \frac{1}{e} \epsilon_{i3k} \frac{x^k}{r(r-x^3)} \right) \frac{\tau^a}{2}. \end{aligned} \quad (68)$$

ここで、

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi} & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \\ \partial_r S^{-1} &= \frac{\partial}{\partial r} S^{-1} = 0 \\ \partial_\theta S^{-1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S^{-1} \\ &= \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 e^{-i\varphi} & -\cos \theta/2 \\ \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ \partial_\varphi S^{-1} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} S^{-1} \\ &= \frac{-i}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & -\cos \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

などを使った。

これは、 z 軸正の方向に伸びる Dirac ストリングを持った、磁荷 $g_m = 4\pi/e$ の Dirac monopole に他ならない。(66) 式を見ると、確かにこのときのゲージ変換は正の z 軸 ($\theta = 0$) で (φ が不定となるため) singularity をもち、その結果として正の z 軸上で singular になるゲージ場を得た。

REFERENCES

- 1 この紀要の主要結果は次の論文にまとめてある;
S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara and S.Ito, "Lattice construction of Cho-Faddeev-Niemi decomposition and gauge invariant monopole "to appear in Phys. Lett. B. (arXiv:hep-lat/9710011).
- 2 T.A. DeGrand and D. Toussaint, Phys.Rev.**D22**(1980),2478.
- 3 Arjan van der Sijs, *Monopoles and confinement in SU(2) gauge theory*, Ph.D. thesis., nucl.Phys.**B355** (1991) 603.
- 4 G. 't Hooft, *Nucl. Phys.***B79**(1974),276,
- 5 A.M. Polyakov, *JETP Lett.***20**(1974)194, *JETP Lett.***41**(1975)988.
- 6 M. Georgi and S.L. Glashow, *Phys.Rev.Lett.***28**(1972)1494.
- 7 佐藤光、物理数学特論 群と物理、丸善
- 8 S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara and S.Ito, in preparation.